需要再次熟悉的内容

1. 等价无穷小 $\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}$（忘）
2. 等价无穷小$\sqrt[n]{x+1} - 1 \sim \frac{1}{n}x$
3. 泰勒展开$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + o(x^5)$（新）
4. 泰勒展开$\arctan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$（新）
5. 斯特林公式$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n(n \to \infty)$
6. Stolz定理
   - 第一种：$\frac{*}{\infty}$型，要求分母数列递增且趋于无穷
   - 第二种：$\frac{0}{0}$型，要求分子数列趋于0，分母数列递减且趋于0
7. 海涅定理（归结原则）$\lim_{x \to a} f(x) = b$存在的充要条件是$f(x)$定义域内的任意数列$\{a_n\}$，$\lim_{n \to +\infty} a_n = a$且$a_n$不等于$a$，有$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = b$

函数极限

1. （变限积分+洛必达）

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_{x^2}^{x} \frac{\sin(xt)}{t} dt}{x^2}$$

出现错误：（忘）洛必达，但要注意在被积函数出现x和t耦合时需要先换元
2. （脱帽法）

$$\lim_{x \to 0} [1 + x + \frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}} = e^3，求 \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}$$

出现错误：（忘）脱帽法，先取对数，后脱帽得$\frac{f(x)}{x} = e^{[3+a(x)]x} - 1 - x$，最后求出结果
3. （纯凑的）

$$\lim_{x \to 0} (\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n})^{\frac{e}{x}}$$

出现错误：（忘）夹逼准则不合适，定积分定义无法凑出，但出现了指数，所以在取完对数应用完$\ln x \sim x - 1$的等价无穷小后还应该考虑对于每一个指数项凑出$e^{ix} - 1 \sim ix$的等价无穷小
4. （纯凑的）

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \cdots \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$$

出现错误：（新）分子不断地凑$1-\cos nx\sim\frac{1}{2}(nx)^2$的等价无穷小，分子可以分拆为

$$(1-\cos x)+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x})+\cdots+\cos x\sqrt{\cos 2x}\cdots\sqrt[n-1]{\cos(n-1)x}(1-\sqrt[n]{\cos nx})$$

之后还需要想到有等价无穷小$\sqrt[n]{x+1}-1\sim\frac{1}{n}x$

5. （导数定义）若$f(1)=0$,$f'(1)$存在，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan x}{(e^{x^2}-1)\sin x}$$

出现的错误：（新）题目不确定$f(x)$是否可导，因此泰勒公式、洛必达法则不可用（**有些情况可以用泰勒公式，导数定义/洛必达法则反而不好用，见下**），要凑出$\frac{f(\sin^2 x+\cos x)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}=f'(1)(x\to 0)$

6. （不等式放缩）

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{1+x}dx$$

出现的错误：（新）首先确实需要考虑套绝对值放缩，有

$$0\le|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{1+x}dx|\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\frac{\sin^n x}{1+x}|dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin^n x|dx=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!} & n\text{为奇数}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & n\text{为偶数}\end{cases}$$

之后考虑使用不等式$n\ge\sqrt{n-1}\sqrt{n+1}$将双阶乘的分母与分子对齐消去，最后夹逼准则得到结果0

结论：$\lim_{n\to\infty}\frac{n!!}{(n+1)!!}=0$，但$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!!}{n!!}$不存在

7. （很神秘的组合数）

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\sqrt{x^2+k^2}$$

出现的错误：（新）有$(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k=0$,再考虑$\sqrt{x^2+k^2}\to|x|$,有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k|x|=0$$

将原式转化为

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\sqrt{x^2+k^2}-|x|$$

有理化后看到是有限个无穷小相加，故得0

8. （硬展的）

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2[1-\ln(1+x)]}{x^2}$$

出现的错误：（不敢）无法提取公共的指数部分以后使用$e^x-1\sim x$的等价无穷小，但可以提出e^2后使用泰勒硬展，要记住先展底数再展指数方便判断展开的阶数

9. （需要讨论的）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-x\arctan x}{e^x+x}$$

出现的错误：（忘）出现指数和趋近无穷的方向不确定时一定要讨论，趋于正负无穷时分别同除e^x和x判断极限，最后得到极限不存在

数列极限

1. （凑平方差）

$$\lim_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n}),|a|<1$$

出现的错误：（新）凑平方差，乘$(1-a)$后除掉

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-a}(1-a^{2^{n+1}})=\frac{1}{1-a}$$

2. （凑平方差）对于$x>1$，求证级数

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2^k}}{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^{2^k}+1)}$$

收敛，并求和

出现的错误：（新）也是凑平方差，同乘$(1-x)$,之后再裂项

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2^k}(1-x)}{1-x^{2^{k+1}}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+x^{2^k}-1}{1-x^{2^{k+1}}}(1-x)=(1-x)(\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1-x^{2^{n+1}}})$$

之后取部分和极限$\lim_{n\to\infty}S_n$，得$\frac{1}{1+x}$

3. （斯特林公式/Stolz定理）

$$\lim_{n\to\infty}n!^{\frac{1}{n\ln n}}$$

出现的错误：（忘）取对数后使用斯特林公式

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{n\to\infty}\exp(\frac{\ln n!}{n\ln n}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\exp(\frac{\ln\sqrt{2\pi n}+n\ln\frac{n}{e}}{n\ln n}) \\
&= \exp(0+\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n}{e}}{\ln n}) \\
&= e
\end{aligned}
$$

或者使用Stolz定理

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \exp(\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!-\ln(n-1)!}{n\ln n-(n-1)\ln(n-1)}) \\
&= \exp(\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n\ln\frac{n}{n-1}+\ln(n-1)}) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

4. （求通项）设$a_1=1,a_k=k(a_{k-1}+1)(k=2,3,\cdots)$,求

$$
\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{a_k})
$$

出现的错误：（新）形如这样的题目需要先求出a_k的通项，这个题需要在递推公式中两边同除$k!$,累加后得到

$$
\frac{a_k}{k!}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}
$$

故可知$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{k!}=e$,之后使用递推公式将题目的累乘化为

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_1}\cdot\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=e
$$

5. （周期性）

$$
\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})
$$

出现的错误：（忘）注意到$\pi\sqrt{n^2+n}\sim n\pi$,故使用$\sin x$的半周期$\sin(x+n\pi)=(-1)^n\sin x$,之后有理化即可

6. （定积分定义+夹逼准则）

$$
\lim_{n\to\infty}(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2+n})
$$

出现的错误：（不敢做）凑出

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}$$

后考虑放缩分母，得到

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$$

取极限后两边

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x dx$$

3. （Stolz定理+归结原则）设$x_0=1$,$x_n=\ln(1+x_{n-1})$，$n=1,2,3,\cdots$,求$\lim_{n\to\infty}nx_n$
   出现的错误：（新）形如这样的题通常要结合Stolz定理和归结原则
   先由不等式$x\ge\ln(1+x)$得到$x_n=\ln(1+x_{n-1})\le x_{n-1}$,$\{x_n\}$递减，$\{\frac{1}{x_n}\}$递增
   再注意到x_n的下界应该为$\ln 1=0$,故由数列单调有界知x_n收敛，递推公式两侧取极限得数列极限为0
   之后使用Stolz定理得到

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n-1}}{x_{n-1}-x_n}$$

代入递推公式得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_{n-1})x_{n-1}}{x_{n-1}-\ln(1+x_{n-1})}$$

归结原则转化为函数极限

$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}$$

泰勒展开得结果为2

4. （Stolz定理+归结原则+泰勒中值）设$f(x)$在$(-1,1)$处三阶连续可导，
$f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=0,f'''(0)=-1$,又设数列$\{a_n\}$满足$a_1\in(0,1)$,
$a_{n+1}=f(a_n),n=1,2,3,\cdots$,$\{a_n\}$严格单调减少且$\lim_{n\to\infty}a_n=0$,求$\lim_{n\to\infty}na_n^2$

出现的错误：（新）使用完Stolz定理和归结原则后，原式变为

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2f^2(x)}{x^2-f^2(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2f^2(x)}{[x+f(x)][x-f(x)]}$$

为了用到$f(x)$的三阶导去考虑洛必达，但是式子极为复杂，所以还可以使用麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2}+f'''(\xi)\frac{\xi^3}{3!}=x+f'''(\xi)\frac{\xi^3}{3!}$$

其中$0<\xi<x$,在分母$x+f(x)$处只使用带佩亚诺余项的$f(x)=x+o(x)$,在$x-f(x)$处则需要使用带拉格朗日余项的$f(x)=x+f'''(\xi)\frac{\xi^3}{3!}$,乘开注意到分母的幂次最高为4，则分子需要展开到四次项，只需要使用带佩亚诺余项的$f(x)=x+o(x)$,最后得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{f'''(\xi)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^4+o(x^4)}{[2x+o(x)](-\frac{x^3}{3!})}$$

前一个极限取$\xi\to x$得到结果为3