需要再次熟悉的内容

1. 对于一元函数，可导必连续
2. 莱布尼兹公式$[f(x)g(x)]^{(n)}=C_n^kf^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$
3. 三角函数的导数
    1. 余弦$\cos^{(n)}x=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$
    2. 正弦$\sin^{(n)}x=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$
4. 因式分解$1-x^n=(1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1})$
5. 级数展开+泰勒公式求高阶导数

题

1. （求参数）确定a,b的值，使得

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}(1-\cos ax) & x<0\\ 0 & x=0\\ \frac{1}{x}\ln(b+x^2) & x>0\end{cases}$$

在$(-\infty,+\infty)$内处处可导，并求它的导函数
出现的错误：（忘）可导必连续，所以首先使用连续的定义，有

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}(1-\cos ax)=0\\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}\ln(b+x^2)=0\end{cases}$$

第一项解不出a，但第二项可以解出b=1 $，如若不然则第二项极限不存在
之后原式变为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}(1-\cos ax) & x<0\\ 0 & x=0\\ \frac{1}{x}\ln(1+x^2) & x>0\end{cases}$$

可知需要使得$x=0$的导数存在，即有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x^2)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{x}(1-\cos ax)}{x}$$

得到$a=\pm\sqrt{2}$，$f'(0)=1$，之后得到

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}x\sin\sqrt{2}x-(1-\cos\sqrt{2}x)}{x^2} & x<0\\ 1 & x=0\\ \frac{2}{1+x^2}-\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} & x>0\end{cases}$$

2. （级数展开+泰勒公式求n阶导）设$f(x)=\ln\frac{1-2x}{1+3x},n\geq 2$，求$f^{(n)}(0)$
   出现的错误：（忘）除了可以瞪出来，还可以考虑

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

所以

$$\ln\frac{1-2x}{1+3x}=\ln(1-2x)-\ln(1+3x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}[(-2)^k-3^k]x^k$$

而考虑麦克劳林级数

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

所以有

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}[(-2)^n-3^n]$$

得到$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)![(-2)^n-3^n]$

3. （很神秘的求导数）设

$$f(x)=x^2(x+1)^2(x+2)^2\cdots(x+n)^2$$

求$f''(0)$
出现的错误：（新）考虑$f(x)=x^2g(x)$，其中$g(x)=(x+1)^2\cdots(x+n)^2$
之后有

$$\begin{aligned}f'(x)&=2xg(x)+x^2g'(x)\\ f''(x)&=2g(x)+4xg'(x)+x^2g''(x)\end{aligned}$$

带入$x=0$后有

$$f''(0)=2g(0)=2(n!)^2$$

4. （求渐近线）求

$$y=\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x})$$

的渐近线
出现的错误：（忘）取$x \to \pm\infty$得无水平渐近线
考虑垂直渐近线，求出y的定义域为$(-\infty, -\frac{1}{2})$ $(0, +\infty)$，得到间断点为$x = 0, x = -\frac{1}{2}$
但是在$x = 0$处，倒代换+洛必达得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to 0^+} \sqrt{4x^2 + x} \ln(2 + \frac{1}{x}) \\
&= \lim_{t \to +\infty} \sqrt{\frac{4}{t^2} + \frac{1}{t}} \ln(2 + t) \\
&= \lim_{t \to +\infty} \frac{\sqrt{4 + t} \ln(2 + t)}{t} \\
&= \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(2 + t)}{2\sqrt{4 + t}} + \frac{\sqrt{4 + t}}{2 + t} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

取极限时要注意开根号时的去绝对值问题
所以$x = 0$不是垂直渐近线
考虑斜渐近线

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x} \ln(2 + \frac{1}{x})}{x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|\sqrt{4 + \frac{1}{x}} \ln(2 + \frac{1}{x})}{x} \\
&= 2 \ln 2
\end{aligned}
$$

同理当$x \to -\infty$时斜率为$-2\ln 2$
接下来考虑

$$\lim_{x \to +\infty} y \pm 2 \ln 2x$$

倒代换+洛必达得$\pm(1 + \frac{1}{4} \ln 2)$
所以渐近线为$x = -\frac{1}{2}, y = (2\ln 2)x + \frac{1}{4}\ln 2 + 1, y = -(2\ln 2)x - \frac{1}{4}\ln 2 - 1$
5. （求高阶导数）设$f(x) = e^x \sin 2x$，求$f^{(4)}(0)$
法1）（数学归纳法瞪）

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x = \sqrt{5} \sin(2x +)e^x \\
f''(x) &= 2\sqrt{5} \cos(2x +)e^x + \sqrt{5} \sin(2x +)e^x = 5 \sin(2x + 2)e^x
\end{aligned}
$$

故数学归纳法得到

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{5})^n \sin(2x + n)e^x$$

故得到$f^{(4)}(0) = 25 \ \sin(4)$，由使用辅助角公式时的$\sin = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos = \frac{1}{\sqrt{5}}$展开得到结果为-24
法2）（级数展开+泰勒公式求n阶导）考虑使用麦克劳林级数

$$f(x)=[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)][2x-\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^4)]$$

考虑求导后令$x=0$，只有x^4的项的系数可以保留，所以查看上面x^4的系数，得到-1
而它等于$\frac{f^{(4)}(0)}{4!}$，所以得到结果为$-4!=-24$
6. （级数展开+泰勒公式求n阶导）设$y=\arctan x$，求$y^{(n)}(0)$
考虑

$$y'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}=1-x^2+x^4+\cdots$$

对这个级数再求奇数阶导取$x=0$后结果一定为0，则n为偶数时结果一定为0

对这个级数求偶数阶导取$x=0$后，只有x^{2k}满足$2k=n-1$的项可以保留，其系数为$(-1)^{\frac{n-1}{2}}$，得到结果为$(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$
最后得到结果

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n\text{为偶数}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! & n\text{为奇数}\end{cases}$$

7. 设$(x)=\frac{d^n}{dx^n}(1-x)^n$，，$n$为正整数，求$(1)$
考虑

$$(1-x)^n=(1-x)^n(1+x+x^2\cdots+x^{-1})^n$$

考虑使用莱布尼兹公式，注意到$(1-x)^n$的前$n-1$阶导数在$x=1$时均为0，n阶导为$(-1)^n n!$
所以

$$(1)=C_n^n[(1-x)^n]^{(n)}(1+x+x^2+\cdots+x^{-1})^n|_{x=1}=(-1)^n n!\cdot(1+1\cdots+1)=(-1)^n n!^n$$