需要再次熟悉的内容

1. 倍角公式
    1. $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$
    2. $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$
2. 降幂公式
    1. $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
    2. $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$
3. $\arctan x$的一些特性
    1. $\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$
    2. $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$
    3. 奇函数$\arctan(-x) = -\arctan x$
4. 区间再现公式以及$\frac{1}{2}$倍的表示
5. 结论$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \int_0^\pi xf(\cos x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$
6. 辅助角公式+换元有时可解决问题
7. 积分第一中值定理$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx(a < \xi < b, g(x)$在$[a,b]$上不变号)
8. 一些级数的和
    1. $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$
    2. $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$
    3. $\frac{\pi^2}{24} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$
    4. $\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n^2} + \cdots$
9. 高斯积分
    1. $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
    2. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

不定积分

1. （倍角公式+分部积分）

$$\int \frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}dx$$

出现的问题：（忘）展开$\sin 2x$后凑微分

$$
\begin{aligned}
原式 &= 2\int \frac{e^{-\sin x}\sin x}{(1-\sin x)^2}d\sin x \\
&\overset{\sin x=t}{=} 2\int \frac{e^{-t}t}{(1-t)^2}dt
\end{aligned}
$$

之后将e^{-t}凑入进行分部积分，最终得到结果为$\frac{2e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$

2. （分部积分）

$$\int(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

出现的问题：（不敢）考虑$e^{x+\frac{1}{x}}$中的$x+\frac{1}{x}$求导后为$1-\frac{1}{x^2}$，而到这里需要注意到前面括号中的$x-\frac{1}{x}$在提出一个x后就为$1-\frac{1}{x^2}$，所以

$$原式 = \int e^{x+\frac{1}{x}}dx + \int x(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

将后面积分的$(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}$凑入进行分部积分，最后出现的积分项与前一个积分相抵消，最后得到结果为$xe^{x+\frac{1}{x}}+C$

3. （有理函数的积分）

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$$

出现的问题：（新）

法1）同除x^2后有

$$
\begin{aligned}
原式 &= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx \\
&= \int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{1}{x})+C
\end{aligned}
$$

法2）首先考虑分母的$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2$，平方差展开后为$(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$

所以有

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{x^2+1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{x}-x)] + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{1}{x}) + C_1
\end{aligned}
$$

4. （辅助角公式）已知$f(x)$在$(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$内满足

$$f'(x) = \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x}$$

求$f(x)$
出现的问题：（新）在考虑使用立方和公式展开分母后

$$f'(x) = \frac{1}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)}$$

还需要想到在前半部分使用辅助角公式，在后半部分使用倍角公式

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})(1-\frac{1}{2}\sin 2x)}$$

还需要考虑令$t = x + \frac{\pi}{4}$，之后有

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sin t(1+\frac{1}{2}\cos 2t)}$$

此时进行积分，分子分母同乘$\sin t$凑出$\cos t$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sin t}{\sin^2 t(1+\frac{1}{2}\cos 2t)}dt\\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\cos t}{(1-\cos^2 t)(\frac{1}{2}+\cos^2 t)}\\
&= -\sqrt{2}\int\frac{d\cos t}{(1-\cos^2 t)(1+2\cos^2 t)}\\
&= -\frac{\sqrt{2}}{3}\int(\frac{1}{1-\cos^2 t}+\frac{2}{1+2\cos^2 t})d\cos t\\
&= -\frac{\sqrt{2}}{6}\ln\frac{1+\cos t}{1-\cos t}-2\arctan(\sqrt{2}\cos t)+C\\
&= -\frac{\sqrt{2}}{6}\ln\frac{1+\cos(x+\frac{\pi}{4})}{1-\cos(x+\frac{\pi}{4})}-2\arctan[\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})]+C
\end{aligned}
$$

5. （含参积分）设隐函数$y=y(x)$由方程$y^2(x-y)=x^2$所确定，求

$$\int\frac{dx}{y^2}dx$$

出现的问题：（新）这类题技巧固定，一般是令隐函数方程中的高次项（这个题中是$\frac{y}{x}$，也可以是$\frac{x}{y}$）为t，求解出$y(t),x(t)$后带入积分求解，于是得到

$$
\begin{aligned}
&dx=\frac{-2+3t}{t^3(1-t)^2}dt\\
&y=\frac{1}{t(1-t)}\\
&\text{原式}=\int(3-\frac{2}{t})dt=3t-2\ln|t|+C
\end{aligned}
$$

最后得到结果为$3\frac{y}{x}-2\ln|\frac{y}{x}|+C$

定积分

1. （分部积分+区间再现）求

$$\int_0^\pi[\int_0^x(x-\pi)\frac{\sin(t-\pi)^2}{t-\pi}dt]dx$$

出现的问题：（没有想到）令

$$f(x)=\int_0^x\frac{\sin(t-\pi)^2}{t-\pi}dt$$

将$(x-\pi)$凑入外层积分，有

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f(x)d(x-\pi)^2$$

之后进行分部积分

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi (x-\pi)^2 \frac{\sin(x-\pi)^2}{x-\pi} d \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\pi (x-\pi)\sin(x-\pi)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}(1-\cos\pi^2)
\end{aligned}
$$

2. （待定系数法求函数）设$f(x)\in C[-\pi,\pi]$，且满足

$$
f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx
$$

求$f(x)$
出现的错误：（忘）此类题的做法固定，因为$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx$的值是固定的，所以可将其设为，如此有

$$
f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+
$$

则

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx \\
&= 2\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx \\
&= \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}
$$

所以$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2 x}+\frac{\pi^2}{2}$

3. （无限积分区间下周期函数的积分）

$$
\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}
$$

出现的错误：（新）洛必达法则得到的结果是震荡的，所以要考虑计算这个极限，必须要将分子的积分区间按周期拆分
首先考虑$|\sin x|$的周期为π，所以，将$[0,\pi]$拆出$[\frac{x-0}{\pi}]$个周期，并将x表示为
$n\pi+m(0<m<\pi)$
如此，分子积分变为

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{x-[\frac{x}{\pi}]\pi}|\sin t|dt+[\frac{x}{\pi}]\int_0^\pi|\sin t|dt \\
&=\int_0^m|\sin t|dt+2n
\end{aligned}
$$

而

$$0 \leq \int_0^{\pi} |\sin t| dt \leq \int_0^{\pi} |\sin t| dt = 2$$

所以原极限为

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2n}{n\pi+m} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x |\sin t| dt}{x} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{2n+2}{n\pi+m}$$

夹逼准则得到极限为$\frac{2}{\pi}$

4. （需要分段的积分极限）求证

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2} e^{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

出现的错误：（新）需要考虑对被积函数进行分段，可以注意到

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2} dx = \lim_{n\to+\infty} \arctan nx = \frac{\pi}{2}$$

所以需要想办法2将e^{x^2}拿出积分，最直接的方法是使用积分第一中值定理

$$\text{原式} = \lim_{n\to+\infty} e^{\xi^2} \int_0^1 \frac{n}{1+n^2x^2} dx (0<\xi<1)$$

但是这里遇到问题，e^{ξ^2}值不确定，ξ所在的区间太过于长了，理想情况下应使得e^{ξ^2}能够收敛于1，即$\xi \to 0$，所以区间应该为分为两部分，并且中间端点在$n \to \infty$时的极限应该为0
最为简单的候选情况是$\frac{1}{n}$，此时e^{ξ^2}可为1，积分被拆分为

$$\arctan nx|_0^{\frac{1}{n}} + \arctan nx|_{\frac{1}{n}}^1$$

可以看到前面和后面部分的积分值出现了$\frac{\pi}{4}$，这不能被接受，应该为0，所以不能让$\arctan nx$中的nx中的n抵消掉x中的n，一种办法是将区间端点选为$\frac{1}{\sqrt{n}}$，这样nx在带入后会变为$\frac{1}{\sqrt{n}}x$，取极限后为0，同时ξ依然可以保证收敛为0
具体证明过程不再补充，有些时候类似题目区间端点也可以考虑$\sqrt{n}$等，这将用于抵消$\arctan(\ )$中的

5. （积分第一中值定理）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(x)>0$，求

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x^2 \sqrt[n]{f(x)} dx$$

出现的错误：（忘）需要记住$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{C} = 1$这个极限结论，之后使用积分第一中值定理进行放缩得到结果为$\frac{b^3-a^3}{3}$

6. （递推）求

$$\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx$$

将x^m凑入进行分部积分得到结果为

$$[\frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n]|_0^1 - \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx$$

前面需要取极限，最后得到结果为0，而令原积分为$_n$，后侧积分为$_{n-1}$
从而得到

$$\frac{_n}{_{n-1}} = -\frac{n}{m+1}$$

所以

$$_n = \frac{-n}{m+1}\frac{-(n-1)}{m+1}\cdots\frac{-1}{m+1}{}_0$$

而$_0 = \int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$
所以得到$_n = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$

7. （原函数法重积分化二次积分）设$f(x)$在$[a,b]$上连续，求证

$$2\int_a^b f(x)dx[\int_x^b f(t)dt] = [\int_a^b f(x)dx]^2$$

出现的错误：（新）令

$$(x) = \int_x^b f(t)dt$$

则

$$'(x) = -f(x), (b) = 0$$

于是

$$\begin{aligned} 2\int_a^b f(x)dx[\int_x^b f(t)dt] &= 2\int_a^b f(x)(x)dx \\ &= -^2(x)|_a^b \\ &= ^2(a) \end{aligned}$$

而等式右侧即为$^2(a)$，得证

反常积分

1. （求参数）a,b均为常数，$a>2, a\ \ 0$，求a,b的值，使得

$$\int_1^{+\infty}[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1]dx=\int_0^1\ln(1-x^2)dx$$

出现的错误：（没想到）直接计算两边积分的值，取等号得到参数的值
首先考虑右边

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_0^1\ln(1+x)dx+\int_0^1\ln(1-x)dx\\&=2\ln 2-2\end{aligned}$$

再考虑左边，这时候应该注意到左边是一个**有理函数的积分**

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_1^{+\infty}\frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)}dx\\&=\int_0^{+\infty}(\frac{1}{x}+\frac{b-a-2}{2x+a})dx\\&=(\ln|x|+\frac{b-a-2}{2}\ln|2x+a|)|_1^{+\infty}\\&=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{|x|}{|2x+a|^{\frac{a+2-b}{2}}}+\frac{a+2-b}{2}\ln(2+a)\end{aligned}$$

因为必须要凑为分式取极限，所以将$\ln(2x+a)$前的系数进行调整$\times(-1)$
令$\frac{2+a-b}{2}=1$，否则$\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{|x|}{|2x+a|^{\frac{a+2-b}{2}}}$为无穷，则$a=b$
则$\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{|x|}{|2x+a|^{\frac{a+2-b}{2}}}=-\ln 2$
则后侧的$\frac{a+2-b}{2}\ln(2+a)=3\ln 2-2$，得到$a=b=8e^{-2}-2$

2. （周期函数的无限区间积分）求证

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

不是绝对收敛的
出现的问题：（新）周期函数应用分段法，将每一段估值后化为级数再证明
设$=\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx=\lim_{\to+\infty}\int_0\frac{|\sin x|}{x}dx$
首先将分拆为多个周期段内的积分，首先证明末端$(n+1)\pi$到上的积分是收敛的

$$0\le\lim_{n\to+\infty}\int_{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\overset{|\sin x|\text{放缩到}1,\frac{1}{x}\text{放缩到}\frac{1}{(n+1)\pi}}{\le}\lim_{n\to+\infty}\frac{-(n+1)\pi}{(n+1)\pi}=0$$

其中$(n+1)\pi\le\ \ \le(n+2)\pi$
所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$$

现在考虑

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

这个级数通项的敛散性
将$\frac{1}{x}$放缩，得到

$$\text{原式} \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| dx = \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

这是一个调和级数，比较审敛原理得到级数发散，得证

3. （级数估计反常积分）求

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3(e^{\frac{\pi}{x}} - 1)} dx$$

出现的错误：（新）原函数不易得出，所以考使用级数展开估计此积分
首先进行到代换，处理掉分母e指数上的$\frac{1}{x}$，最后得到

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t}{(e^{\pi t} - 1)} dt$$

之后考虑使用$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (|x| < 1)$，为此必须将分母除以$e^{\pi t}$化到$(-1, 1)$内

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi t}} dt \\
&= \int_0^{+\infty} te^{-\pi t} \cdot (\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\pi t}) dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} te^{-(n+1)\pi t} dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2 \pi^2} \\
&= \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\pi^2} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$