需要再次熟悉的内容

1. 二重积分中值定理（类似积分第一中值定理）若函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，函数$g(x,y)$在D上可积不变号，则$\iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)dxdy$
2. 对称性（偶倍奇零/轮换对称性）
3. 柯西-施瓦兹不等式（积分形式）$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$
4. 第一型/二型曲线/曲面积分的计算方法，计算第二型/一型转二型时要注意**判断方向**
5. 斯托克斯公式$\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \oint_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$

二重积分

1. （偶倍奇零+轮换对称）设$D = \{(x,y)|1 \le x^2+y^2 \le 4\}$，则求

   $$I = \iint_D (x+y^2)e^{-(x^2+y^2-4)}dxdy$$

   出现的问题：（忘）被积函数中$(x+y^2)$不好处理，所以在尝试使用极坐标换元处理整个被积函数之前，应该优先考虑使用对称性简化被积函数
   首先由于被积函数是关于x的奇函数且积分区域关于y轴对称，积分可以简化为

   $$\iint_D y^2 e^{-(x^2+y^2-4)}dxdy$$

   在这之后其实还可以使用x,y的轮换对称性，将积分化为

   $$\frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2-4)}dxdy$$

   之后使用极坐标换元处理即可，最后得到答案为$\frac{\pi}{2}(2e^3-5)$
2. （二重积分中值定理）设区域$D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 4^2\}$，求

   $$\lim_{\to 0} \frac{1}{2}\iint_D e^{x^2y^4}\cos(xy^2)d$$

   出现的问题：（新）函数难以积出，考虑使用积分中值定理处理，将积分内的函数拿出，只

留下1，得到积分区域的面积

$$
\begin{aligned}
原式 &= \lim_{\to 0} \frac{1}{2} e^{\xi^2\eta^4} \cos(\xi\eta^2) \iint_D d[(\xi,\eta) \to (0,0)] \\
&= \lim_{\to 0} \frac{1}{2} 4\pi^2 e^{\xi^2\eta^4} \cos(\xi\eta^2) \\
&= 4\pi
\end{aligned}
$$

3. （轮换对称性+交换积分区域）设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，并设$\int_0^1 f(x)dx = A$，求

$$I = \int_0^1 \int_x^1 f(x)f(y)dxdy$$

出现的问题：（新）首先使用轮换对称性

$$I = \int_0^1 \int_y^1 f(y)f(x)dxdy$$

让后交换积分区域

$$原式 = \int_0^1 \int_0^x f(x)f(y)dxdy$$

所以

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_x^1 f(x)f(y)dxdy + \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^x f(x)f(y)dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 f(y)dy \\
&= \frac{A^2}{2}
\end{aligned}
$$

4. （重积分换元）计算

$$\iint_D \frac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}} dxdy$$

其中区域D是由直线$x+y=1$与两坐标轴所围成的三角形区域
出现的错误：（忘）考虑到积分区域的函数式含在被积函数中，并且被积函数非常复杂，考虑使用重积分换元简化问题
令

$$
\begin{cases} \dfrac{y}{x} = u \\ x+y = v \end{cases}
\quad
\begin{cases} x = \dfrac{v}{1+u} \\ y = \dfrac{uv}{1+u} \end{cases}
$$

计算雅可比行列式

$$
=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -\frac{v}{(1+u)^2} & \frac{1}{1+u} \\ \frac{v}{(1+u)^2} & \frac{u}{1+u} \end{vmatrix}=-\frac{v}{(1+u)^2}
$$

所以

$$
I=\int_0^1 \frac{v^2}{\sqrt{1-v}}dv\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+u)}{(1+u)^2}du
$$

分别积分得到为$\frac{15}{16}$

5. （格林公式）设函数$f(x,y)$在闭区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$上具有二阶连续偏导数，且$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2+y^2$，求

$$
\lim_{\to 0^+}\frac{\iint_{x^2+y^2\le ^2}(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})dxdy}{(\tan \; -\sin \;)^2}
$$

出现的问题：（新）首先计算分子，注意到积分区域可以使用极坐标换元，令

$$
\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}\begin{cases} dx=-\rho\sin\theta \\ dy=\rho\cos\theta \end{cases}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\iint_{x^2+y^2\le ^2}(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})dxdy \\
&=\int_0 \rho d\rho\int_0^{2\pi}(\rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y})d\theta \\
&=\int_0 \rho d\rho\oint_{x^2+y^2\le\rho^2}\frac{\partial f}{\partial x}dy-\frac{\partial f}{\partial y}dx
\end{aligned}
$$

到这里便可以使用格林公式

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\int_0 \rho d\rho\iint_{x^2+y^2\le\rho^2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})dxdy \\
&=\int_0 \rho d\rho\iint_{x^2+y^2\le\rho^2}(x^2+y^2)dxdy \\
&=\int_0 \rho d\rho\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\rho}u^3du \\
&=\frac{\pi}{2}{}^6
\end{aligned}
$$

将分母使用泰勒公式展开到产生^6，之后取极限得到结果为$\frac{\pi}{3}$

三重积分

1. （平方差展开简化计算）计算三重积分

$$\underset{V}{}(x^2+y^2)dxdy$$

其中V是由$x^2+y^2+(z-2)^2 \geq 4$、$x^2+y^2+(z-1)^2 \leq$ 及$z \geq 0$所围成的空间图形
出现的错误：（没考虑到平方差展开）画出积分区域发现是大球内套着一个小球，大球和小球的顶点重合，所以如果用一个平行于z轴的平面去截，会得到一个圆环
再考虑到被积函数是x^2+y^2，所以考虑使用柱坐标计算该积分
整理积分区域得到 $\in [\sqrt{4-(z-2)^2}, \sqrt{-(z-1)^2}]$

$$\begin{aligned} 原式 &= \int_0^4 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{4-(z-2)^2}}^{\sqrt{-(z-1)^2}} {}^3 d \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^4 \{[-(z-1)^2]-[4-(z-2)^2]\}dz \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^4 (8-2z)(8+6z-2z^3)dz \end{aligned}$$

这里要考虑到使用平方差展开，可以简化计算
最后得到结果为$\frac{256}{3}\pi$

2. （三重积分换元）某物体所在的空间区域为: $x^2+y^2+2z^2 \leq x+y+2z$，密度函数为$x^2+y^2+z^2$，求质量

$$M = (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

出现的问题：（新）整理被积函数方程得到$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+2(z-\frac{1}{2})^2 \leq 1$令

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}=m \\ y-\dfrac{1}{2}=n \\ \sqrt{2}(z-\dfrac{1}{2})= \end{cases}$$

计算雅可比行列式得到$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(m,n,p)}=\frac{1}{\sqrt{2}}

所以得到$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\sqrt{2}_1}[(m+\frac{1}{2})^2+(n+\frac{1}{2})^2+(\frac{}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2})^2]dmdnd(_1 : m^2+n^2+{}^2 \leq 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}_1}[m^2+n^2+\frac{{}^2}{2}+\frac{3}{4}+(m+n+\frac{1}{\sqrt{2}})]dmdnd \end{aligned}$$

$

3. （莱布尼兹公式）$F(t)$为连续函数，$t>0$，区域是由椭圆抛物面$z=x^2+y^2$和球面$x^2+y^2+z^2=t^2$所围起来的部分。定义三重积分

$$F(t)=\ f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

求$F(t)$的导数$F'(t)$

出现的问题：（新）首先计算相交的z值，连立两个方程得到$z^2+z-t^2=0$，解出

$$z=\frac{-1+\sqrt{1+4t^2}}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}-\frac{1}{2}$$

令其为a^2，同时有$\sqrt{t^2-z^2}=\sqrt{z}$则

$$原式=\int_0^{a^2}dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}f(^2+z^2)d+\int_{a^2}^{t}dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{t^2-z^2}}f(^2+z^2)d$$

为了将对z的积分部分合在一起，交换与z的积分次序

$$\begin{aligned}原式&=2\pi\int_0^{\sqrt{z}}d\int_0^{a^2}f(^2+z^2)dz+2\pi\int_0^{\sqrt{t^2-z^2}}d\int_{a^2}^{t}f(^2+z^2)dz\\&=2\pi\int_0^{a}d\int_{^2}^{a^2}f(^2+z^2)dz+2\pi\int_0^{a}d\int_{a^2}^{\sqrt{t^2-^2}}f(^2+z^2)dz\\&=2\pi\int_0^{a}d\int_{^2}^{\sqrt{t^2-^2}}f(^2+z^2)dz\end{aligned}$$

令$g(,t)=\ \int_{^2}^{\sqrt{t^2-^2}}f(^2+z^2)dz$

利用莱布尼兹公式得到

$$\begin{aligned}F'(t)&=2\pi[g_t'(,t)+g(a,t)\frac{da}{dt}]\\&=2\pi\int_0^{a}f(t^2)\frac{t}{\sqrt{t^2-^2}}d+2\pi a\int_{a^2}^{\sqrt{t^2-a^2}}f(a^2+z^2)dz\frac{da}{dt}\end{aligned}$$

因为由$z^2+z-t^2=0\ \ a^4+a^2=t^2\ \ \sqrt{t^2-a^2}=a^2$

得到后面的积分为0，而前面的积分可以积出，故得到最后的结果为

$\pi tf(t^2)(1+2t-\sqrt{1+4t^2})$

曲线积分

1. （斯托克斯公式）设曲线Γ为曲线$x^2+y^2+z^2=1,x+z=1,x\geq0,y\geq0,z\geq0$从点$A(1,0,0)$到点$(0,0,1)$的一段，求曲线积分

$$\int_L ydx+zdy+xdz$$

出现的错误：（忘）考虑使用斯托克斯公式，补由B到A的直线$x+z=1,x\geq0,z\geq0,y=0$

则有

$$
\begin{aligned}
&{}_{\Gamma+\Gamma_1} ydx+zdy+xdz-\int_{\Gamma_1} ydx+zdy+xdz \\
&=\iint_{D_1} -dxdy-dydz-dxdz-\int_1^0 (1-z)dz
\end{aligned}
$$

再由截面在zx面上的投影为0，以及$dS=\frac{dydz}{\cos\alpha}=\frac{dzdx}{\cos\beta}=\frac{dxdy}{\cos\gamma}$，其中单位法向量（方向余弦）与$x+z=1$的相同，得到

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=-2\iint_{D_1} dxdy+\frac{1}{2} \\
&=\frac{1}{2}-2\iint_{D_1} dxdy
\end{aligned}
$$

现在计算$x^2+y^2+z^2=1, x+z=1$在xy面上的投影，为$2(x-\frac{1}{2})^2+y^2\le\frac{1}{2}\ \ (x\ge 0, y\ge 0)$
不要忘记范围，这是半个椭圆
最后得到结果为$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$
此外还可以将曲线方程参数化，将整个曲线积分转化为参数的积分

2. （格林公式+微分方程）设函数$u=u(x)$连续可微，$u(2)=1$，且

$$
\int_L (x+2y)udx+(x+u^3)udy
$$

在右半平面与路径无关，求$u(x)$
出现的问题：（忘）由路径无关得到$u'(x)=\frac{u(x)}{x+4u^3(x)}$
即求解微分方程

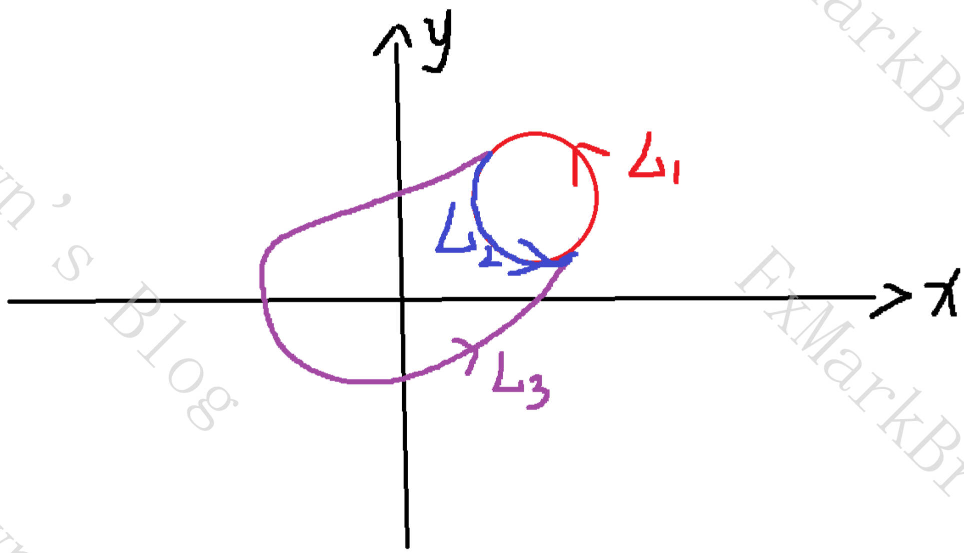
$$
y'=\frac{y}{x+4y^3}\quad \frac{dx}{dy}=4y^2+\frac{x}{y}\quad \frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=4y^2
$$

常数变异解得$x=2u^3(x)+u(x)$
又因为$u(2)=1$解得$=0$
故得到$u(x)=(\frac{x}{2})^{\frac{1}{3}}$

3. （格林公式挖洞法）已知曲线积分

$$
\int_L \frac{1}{(x)+y^2}(xdy-ydx)\ \ A(\text{常数})
$$

其中(x)是非负可导函数$(1)=1$，L是绕原点$(0,0)$一周的任意正向闭曲线，求(x)及A
出现的问题：（新）可以看出此类问题求解(x)应与微分方程有关，故想到要利用格林公式构造含$'(x)$的等式，而现在等号右边不为0，又因为曲线恒包含原点，故想到将原点挖掉获得格林公式后等式右侧为0的式子



设$L_1 + L_2$为任意不含原点的正向闭曲线，L_3为让$L_1 + L_3, L_3 - L_2$包含原点的曲线，有

$$_{L_1+L_3} Pdx + Qdy = A$$
$$_{L_3-L_2} Pdx + Qdy = A$$

两式相减得

$$_{L_1+L_2} Pdx + Qdy = 0$$

进而发现在不包含原点的区域此曲线积分与路径无关，由格林公式最后整理得到

$$x'(x) = 2(x)$$

分离变量，带入初值得到解为$(x) = x^2$
再取L为$x^2 + y^2 = 1$的正向，参数化后计算原曲线积分，得到$A = 2\pi$

曲面积分

1. （极值）设Σ是一个光滑封闭曲面，方向朝外。给定第二型曲面积分

$$I = \iint_\Sigma (x^3 - x)dydz + (y^3 - y)dzdx + (z^3 - z)dxdy$$

试确定曲面Σ，使得积分I的值最小，并求该最小值

出现的错误：（新）首先由高斯公式得到

$$I = 3\,(x^2 + y^2 + z^2 - 1)dV$$

其次考虑，要想使得I最小，当被积函数$x^2+y^2+z^2-1 \le 0$时，应该尽可能的大，当$x^2+y^2+z^2 \ge 0$时，应该尽可能的小，故选择$_{min}$为$x^2+y^2+z^2 \le 1$
使用球坐标计算，最后得到结果为$-\frac{8}{5}\pi$

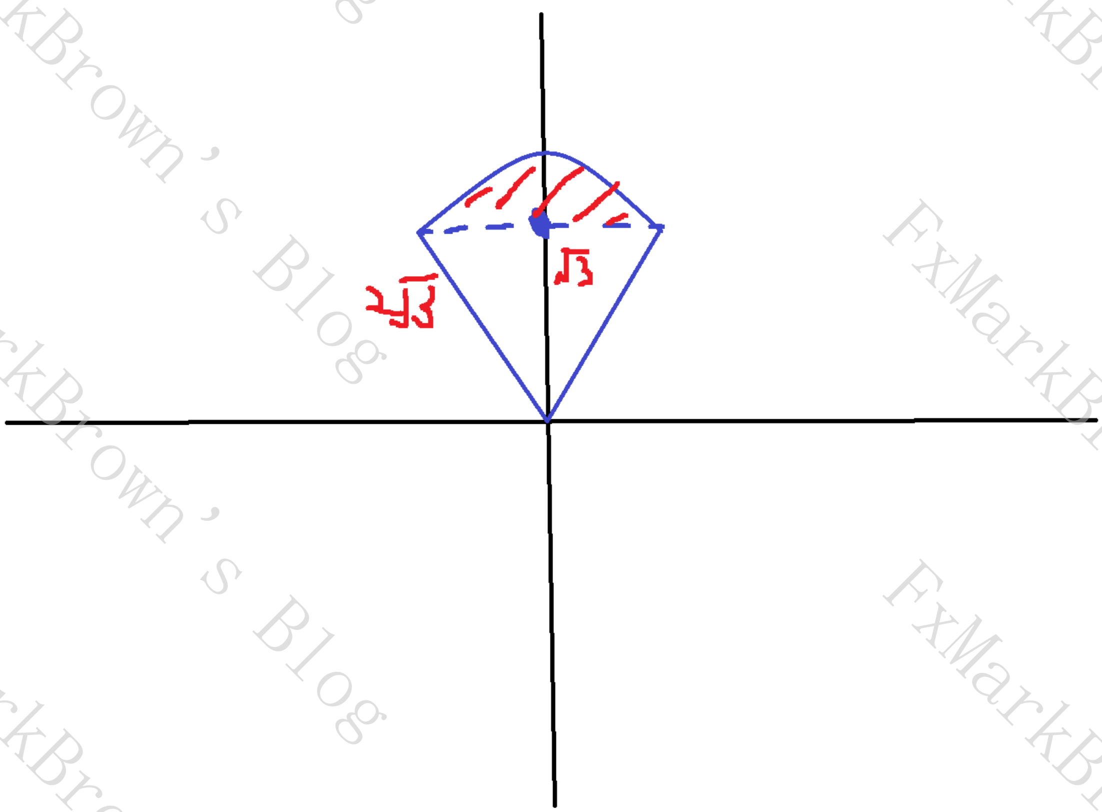
2. （换坐标）设球体$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \le 12$被平面$P: x+y+z=6$所截的小球缺为，记球缺上的球冠为$\Sigma$，方向指向球外，求第二型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

出现的错误：（新）首先补缺失的平面Σ_1，**方向朝球内**，然后使用高斯公式得到

$$I = 3\ dV - \iint_{\Sigma_1} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

记前面的积分和后面的积分分别为I_1和I_2
I_1是球冠体积的3倍，这里可以使用标准积分的先二后一得到，但是要将原点切换到原来的$(1,1,1)$（球坐标勉强可以，但因为球冠是斜着的，和θ的范围难以确定）



作一条过球心垂直于球缺平面的轴，可以看到此时可以在纵轴上进行先二后一积分，姑且将纵轴称为，则积分区域的横切面为圆，球的半径为$2\sqrt{3}$，而球心$(1,1,1)$（注意，不是$(0,0,0)$）到球缺平面$x+y+z=6$的距离为$\frac{|1+1+1-6|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{3}$，得到的积分范围为$[\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$，积分区域横切面圆的半径为$\sqrt{(2\sqrt{3})^2 - {}^2} = \sqrt{12 - {}^2}$

故这一部分的体积为

$$I_1=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} d\iint d=\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\pi(12-{}^2)d=15\sqrt{3}\pi$$

而球缺平面的法向量与$x+y+z=6$相同，得到$dS=\sqrt{3}dydz=\sqrt{3}dzdx=\sqrt{3}dxdy$，**注意，在化为第一型曲面积分时，一定要注意方向，这里要加负号**

$$\begin{aligned}I_2&=\sqrt{3}\iint_{\Sigma_1}(x+y+z)dS\\&=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma_1}(x+y+z)dS\\&=-\frac{6}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma_1}dS\end{aligned}$$

而球缺平面的面积为$\pi[(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2]=\pi$
得到$I_2=-18\sqrt{3}\pi$
故结果为$I=I_1-I_2=33\sqrt{3}\pi$

3. （与极限结合）设函数$f(x)$连续可导，$P=Q=R=f[(x^2+y^2)z]$，有向曲面Σ_1是圆柱体$x^2+y^2\le t^2, 0\le z\le 1$的表面，方向向外，记第二型曲面积分$I=\iint_\Sigma Pdy+Qdzdx+Rdxdy$，求极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{I}{t^4}$$

出现的问题：（忘）高斯公式得到

$$I=[2xzf'+2yzf'+(x^2+y^2)f']dV$$

对称性得到被积函数的前两部分的积分全为0，之后使用柱坐标

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t d\int_0^1 {}^3f'({}^2z)dz$$

这里交换了$,z$的积分顺序是为了最后得到带t的变上限积分函数然后洛必达，积出z,θ得到

$$I=2\pi\int_0^t[f({}^2)-f(0)]d$$

所以极限为

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{I}{t^4}]\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{2\pi\int_0^t[f(^2)-f(0)]d}{t^4}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{2\pi[tf(t^2)-tf(0)]}{4t^3}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{2\pi t(t^2-0)f'(\xi)}{4t^3}(0<\xi<t^2)\\
&=\frac{\pi}{2}f'(0
\end{aligned}
$$