需要再次熟悉的内容

1. 旋转体体积与侧面积
    1. 圆盘法计算体积（x轴）$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx$
    2. 柱壳法计算体积（x轴）$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$
    3. 弧微分计算侧面积（x轴）$S=2\pi\int_a^b f(x)ds=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$
2. 平面束方程（求平面、投影直线常用）
3. 旋转曲面的求解
    1. 方法一：对于形如$\begin{cases}x=0\\y=2z\end{cases}$绕$z$轴旋转的形式，直接套用结论，保持旋转轴的变量$z$不变，另一个变量$y$改为$\pm\sqrt{x^2+y^2}$，最后得到旋转曲面方程
    2. 方法二：对于一般式的直线方程，要求解其绕某个轴（如y轴）的旋转曲面方程时，考虑此直线方程参数化为旋转轴的参数方程，然后利用其到旋转轴的距离不变$x^2+z^2=x^2(y)+z^2(y)$的性质得到旋转曲面的方程

题

1. （求解旋转曲面）求直线

$$L:\begin{cases}x=4\\y=2z\end{cases}$$

绕z轴旋转一周所得曲面S的方程，并说明S为何种曲面
出现的问题：（新）不好直接套用结论，可以使用距离相等计算
设曲面上一点(x,y,z)到z轴的距离与直线上一点(x_0,y_0,z_0)到z轴的距离相等，有

$$\begin{aligned}&x^2+y^2=x_0^2+y_0^2\\&z_0=z\end{aligned}$$

而由于(x_0,y_0)在直线上，又有

$$\begin{cases}x_0=4\\y_0=2z_0\end{cases}$$

连立上面的方程组，消去x_0,y_0,z_0得到结果为$\frac{x^2+y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$，这是单叶双曲面的方程

2. （求平面）求过单叶双曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-2z^2=1$和球面$x^2+y^2+z^2=4$的交线且与直线$L:\begin{cases}x=0\\3y+z=0\end{cases}$垂直的平面方程
出现的问题：（没转过来）首先求直线L的法向量，通过叉乘获得直线的方向向量为$(0,-1,3)$
接着求两曲面的交线，根据刚才叉乘出的法向量得知需要消去x，消去x后得到一对投影平面方程为

$$y^2=9z^2$$

即

$$y\pm 3z=0$$

再结合叉乘出的法向量得知$y-3z=0$即为所求

3. （综合题）设直线

$$L:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$$

在平面

$$:x-y+2z-1=0$$

上的投影直线$_0$的方程，并求$_0$绕y轴旋转一周所成曲面的方程
出现的问题：（新）
法1）直线的问题无法解决，就转化为平面的问题解决，考虑作一个过L且与垂直的平面，将所得的平面与联立得到的交线即为所求
可以知道所要作的平面的法向量同时垂直于题中L的方向向量和的法向量，则由叉乘得到所要作的平面的法向量为$(1,-3,-2)$，再结合直线所经过的固定点$(1,0,1)$得到平面方程为

$$x-3y-2z+1=0$$

从而$_0$的方程为$\begin{cases}x-y+2z-1=0\\x-3y-2z+1=0\end{cases}$
接下来求其绕y轴旋转得到的旋转曲面，考虑将$_0$写为x,z的关于y的参数方程，参数化后得到

$$\begin{cases}x=2y\\z=-\dfrac{1}{2}(y-1)\end{cases}$$

于是直线绕y轴旋转曲面方程为$x^2+z^2=(2y)^2+[-\frac{1}{2}(y-1)]^2$
法2）采用平面束方法，可以将直线L改写为一般式形式，姑且将其写为

$$\begin{cases}x-y-1=0\\y+z-1=0\end{cases}$$

于是过该直线的平面束方程为$x-y-1+(y+z-1)=0$，即$x+(\ -1)y+z-\ -1=0$
再由其法向量与的法向量垂直得到$=-2$，于是得到所要求的平面的方程，之后同法1
法3）由题设知，点$(1,0,1)$在所求平面上，设所求平面的一般式方程为

$A(x-1)+By+C(z-1)=0$

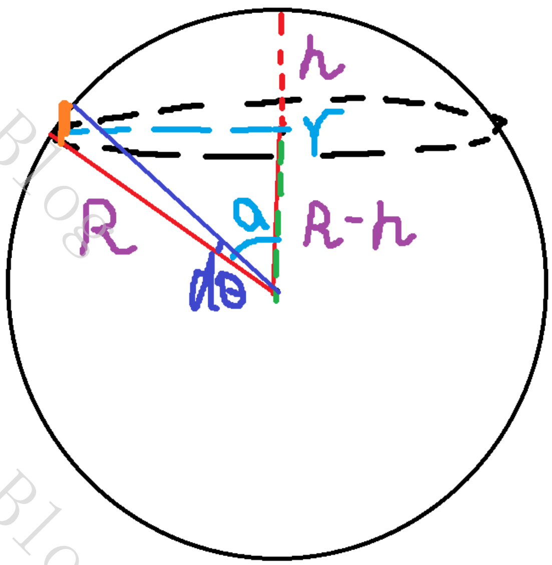
因为此平面的法向量与L的方向向量以及的法向量垂直，所以有

$$\begin{cases} A+B-C=0 \\ A-B+2C=0 \end{cases}$$

解得$A:B:C=-1:3:2$，从而所求平面的方程为$x-3y-2z+1=0$，之后同法1

法4）先求L与的交点M，将L的方程参数化代入的方程并求得交点为$(2,1,0)$，再过$(1,0,1)$作的垂线，参数化后带入方程得到交点为$(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，于是便可以获得方向向量，再使用交点写出投影直线的方程，之后同法1）

4. （球冠的体积和面积）设一球缺高为，所在球半径为R，求证：该球缺体积为$\frac{\pi}{3}(3R-)^2$，球冠的面积为$2\pi R$



出现的问题：（新）首先由先二后一法得知球冠的体积为

$$V=\pi\int_{R-}^{R}(R^2-w^2)dw=\frac{\pi}{3}(3R-)^2$$

这其中涉及了完全立方公式$(a-b)^3=a^3-b^3-a^2b+ab^2$

之后计算球冠的表面积，首先得到球冠表面积的微元为$2\pi r\cdot Rd\theta$（不能使用$2\pi rdw$，误差太大，必须引入弧微分），然后由$r=R\sin\alpha$和积分得到

$$S=\int_0^{\alpha}2\pi R^2\sin\theta d\theta=2\pi R(1-\cos\alpha)=2\pi R$$

5. （拉格朗日乘数法）设$\Sigma_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\Sigma_2:z^2=x^2+y^2$，其中$a>b>c>0$，$\Gamma$为$\Sigma_1$和$\Sigma_2$的交线，求椭球面$\Sigma_1$在$\Gamma$上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值

出现的错误：（忘）首先求出Σ_1的法向量为$(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2})$，之后写出切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)$$

使用距离公式得到距离为

$$d=\frac{|-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}$$

使用拉格朗日乘数法时可以将其取倒数平方，方便求解，则构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,,)=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}+(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)+(x^2+y^2-z^2)$$

有

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{2x}{a^4}+\frac{2x}{a^2}+2x=0(1)\\ \frac{\partial L}{\partial y}=\frac{2y}{b^4}+\frac{2y}{b^2}+2y=0(2)\\ \frac{\partial L}{\partial z}=\frac{2z}{c^4}+\frac{2z}{c^2}-2z=0(3)\\ \frac{\partial L}{\partial}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0(4)\\ \frac{\partial L}{\partial}=x^2+y^2-z^2=0(5)\end{cases}$$

$(1)\times yz+(3)\times xy=(\frac{1}{a^4}+\frac{}{a^2}+\frac{1}{c^4}+\frac{}{c^2})xyz=0$
$(2)\times xz+(3)\times xy=(\frac{1}{b^4}+\frac{}{b^2}+\frac{1}{c^4}+\frac{}{c^2})xyz=0$
若$xyz\neq 0$则$\frac{1}{a^4}+\frac{}{a^2}=\frac{1}{b^4}+\frac{}{b^2}$，矛盾（因为有$a>b$），则有$xyz=0$
又因为满足(5)，故$z\neq 0$，则$x=0$或$y=0$
当$x=0$时$d=bc\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b^4+c^4}}$为最大值
当$y=0$时$d=ac\sqrt{\frac{a^2+c^2}{a^4+c^4}}$为最小值