第一章 复数与复变函数

（参考《复变函数论》钟玉泉）

§1 复数

1. 复数域

此部为主要引入复数，不再过多介绍，除了以后称复数

$z = x+iy$

的实数 x 和 y 分别为复数 z 的实部和虚部，常记为

$x = \mathrm{Re}\, z \quad y = \mathrm{Im}\, z$

2. 复平面

不再赘述的是，只熟知可用复数及复变函数解决很多平面问题非常方便，还可为复数以求示平面向量

模 $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$

此外联想类似于实数的绝对值，有

① $-|z| \leq \mathrm{Re}\, z \leq |z|$

② $-|z| \leq \mathrm{Im}\, z \leq |z|$

③ $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$（三角不等式）

④ $||z_1|-|z_2|| \leq |z_1-z_2|$

⑤ $|z_1+z_2+\cdots+z_n| \leq |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$

距离 $d(z_1,z_2) = |z_1-z_2|$

辐角 $\theta = \mathrm{Arg}\, z$

我们约定，任一非零复数 z 有无穷多个辐角，令 $\arg z$ 表示其中的一个特定值，并满足条件

$-\pi \leq \arg z \leq \pi$

的一个为 $\mathrm{Arg}\, z$ 的主值，或称为 z 的主辐角，于是

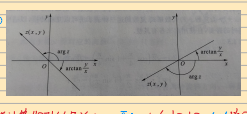
$\theta = \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

可知 $\arg(0+0i) = \arg z\ (0+0i)$

当 $z=0$ 时，辐角无意义

主辐角与 x, y 的关系为

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{当 } x>0 \quad y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{当 } x=0 \quad y>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{当 } x=0 \quad y<0 \\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & \text{当 } x<0 \quad y \geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x}-\pi & \text{当 } x<0 \quad y<0 \end{cases}$$



※实际上，当 $x \neq 0$ 时，基本都会计算 $\arctan|\frac{y}{x}|$，这样计算得到的角总在 $[0,\frac{\pi}{2})$，之后根据 x, y 符号和特角变换到相应的象限即得 $\arg z$

3. 复数的三角与指数形式

代数形式 $z = x+iy$

三角形式 $z = \cos\theta + i\sin\theta$

指数形式 $z = |r|e^{i\arg z}$

（由欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 导出）

e.g. 将复数

$1-\cos\varphi + i\sin\varphi \quad (0 \leq \varphi < \pi)$

化为指数形式

原式 $= 2\sin^2\frac{\varphi}{2} + 2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$

$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2} - i\cos\frac{\varphi}{2}\right)$

$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}) - i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})\right)$

$= 2\sin\frac{\varphi}{2}e^{(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2})i}$

利用复数的指数形式作乘除法较简单，

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

所以

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2| \qquad |\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\ (z_2 \neq 0)$

$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 \qquad \mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Arg}\, z_1 - \mathrm{Arg}\, z_2$

特别地，iz 相当于将 z 在复平面上所对应的平面向量逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$，这里 i 称为旋转乘数

4. 复数的乘幂与方根

考虑非零复数 z 的正整数次幂 z^n，它是 n 个相同因子的乘积，设 $z = r^n e^{i\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

从而有

$|z^n| = |z|^n$

$\mathrm{Arg}\, z^n = n\,\mathrm{Arg}\, z$

当 $r=1$ 时，得棣美弗（De Moivre）公式

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

而求解非零复数的 n 次方根，相当于解二次项方程

$w^n = z \quad (n \geq 2, \text{整数})$

有

$|\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|} = \sqrt[n]{r}$

$\mathrm{Arg}\sqrt[n]{z} = \frac{\mathrm{Arg}\, z}{n} = \frac{\theta+2k\pi}{n}$

这里的 k 表面上可以取 $0, \pm1, \pm2, \cdots$，但实际上只要取 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 即可

将 z 的 n 次方根记为

$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$

或

$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot w_0 \quad (w_0 = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}})$

其中 $e^{i\frac{2k\pi}{n}}\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 为 1 的 n 个 n 次方根，通常记为 $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$，从而 $z \neq 0$ 的 n 个 n 次方根为

$w_0, \omega w_0, \omega^2 w_0, \cdots, \omega^{n-1}w_0$

还有

$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1} = 0 \qquad \omega^n = 1$

因为 ω 为二项方程 $\omega^n = 1$ 之根，即

$\omega^n = (1-\omega)(1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}) =$

e.g. 当 $n=3$ 时 $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，且有

$|\omega|^2 = 1 \qquad |1+\omega|^2 = 0$

e.g. 解方程 $(1+z)^6 = (1-z)^6$

将方程变为 $(\frac{1+z}{1-z})^6 = 1$，设 $w = \frac{1+z}{1-z}$，则 $w^6 = 1$，$w = e^{i\alpha}$，其中 $\alpha = \frac{2k\pi}{6}\ (k=0,1,2,3,4)$

于是由 $w = \frac{1+z}{1-z}$ 得 $z = \frac{w-1}{w+1} = \frac{e^{i\alpha}-1}{e^{i\alpha}+1} = \frac{\cos\alpha+i\sin\alpha-1}{\cos\alpha+i\sin\alpha+1}$

$= \frac{-2\sin^2\frac{\alpha}{2}+i\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+i\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}$

$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}(-\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2})}{2\cos\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2})}$

$= \tan\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\cos(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2})}{(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2})}$

$= \tan\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{e^{i(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2})}}{e^{i\frac{\alpha}{2}}}$

$= i\tan\frac{\alpha}{2}$

此时再取 $k=0,1,2,3,4$，则

$z_0 = 0 \quad z_1 = i\tan\frac{\pi}{6} \quad z_2 = i\tan\frac{\pi}{5} \quad z_3 = i\tan\frac{3\pi}{5} \quad z_4 = i\tan\frac{4\pi}{5}$

5. 共轭复数

设 $z = x+iy$，则 z 的共轭复数为 $\bar{z} = x-iy$，显然

$|\bar{z}| = |z| \qquad \mathrm{Arg}\,\bar{z} = -\mathrm{Arg}\, z$

这表明在复平面上，z 与 $\bar{z}$ 两点关于实轴是对称点。

(1) $\overline{(z_1+z_2)} = \bar{z}_1+\bar{z}_2 \qquad \overline{(z_1-z_2)} = \bar{z}_1-\bar{z}_2$

(2) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2 \qquad \overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\ (z_2 \neq 0)$

(3) $|z|^2 = z\bar{z} \qquad \mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\bar{z}}{2}$

(4) 设 $R(a,b,c,\cdots)$ 表示对复数 $a,b,c,\cdots$ 的任一有理运算，则

$\bar{R}(a,b,c,\cdots) = R(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\cdots)$

e.g. 求复数

$w = \frac{1+z}{1-z}$（复数 $z \neq 1$）

的实部、虚部分别

$w = \frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(\overline{1-z})}{(1-z)(\overline{1-z})}$

$= \frac{(1+z)(1-\bar{z})}{|1-z|^2}$

$= \frac{1+z-\bar{z}-z\bar{z}}{|1-z|^2}$

$= \frac{1-|z|^2+2i\,\mathrm{Im}\, z}{|1-z|^2}$

则

$\mathrm{Re}\, w = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \qquad \mathrm{Im}\, w = \frac{2\,\mathrm{Im}\, z}{|1-z|^2}$

又因为

$|w|^2 = w\bar{w} = \frac{1+z}{1-z} \cdot \frac{\overline{1+z}}{\overline{1-z}} = \frac{(1+z)(1+\bar{z})}{|1-z|^2}$

$= \frac{1+z+\bar{z}+z\bar{z}}{|1-z|^2}$

$= \frac{|1+z|^2+2\,\mathrm{Re}\, z}{|1-z|^2}$

则

$w = \frac{\sqrt{1+|z|^2+2\,\mathrm{Re}\, z}}{|1-z|}$

6. 复数在几何上的运用举例 以及 7. 由实数大构造复数的方法之推广（四元数及八元数）暂不整理

§2 复平面上的点集

（参考《复变函数论》钟玉泉）

1. 平面点集的几个基本概念

此部分的概念大多已在数分/高数中提到，故不展开

邻域 去心邻域 内点 外点 聚点 边界 开集 闭集 有界集 无界集

2. 区域与若尔当（Jordan）曲线

定义（区域） 具备下列性质的非空点集 D 称为区域

(1) D 为开集

(2) D 中任意两点可用在 D 中的折线连接

此外我们定义有界集 E 的直径为

$d(E) = \sup\{|z-z'|\ \ z \in E, z' \in E\}$ （sup：上确界，最小上界）

复变函数的基础几何概念还有曲线

定义（曲线） 设 $x(t)$ 及 $y(t)$ 是实变数 t 的两个实函数，它们在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则由方程组

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

或由复数方程

$z = x(t)+iy(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (*)$

（简记为 $z = z(t)$）

所决定的点集 C，称为 z 平面上的一条连续曲线，或（$*$）称为 C 的参数方程，$z(\alpha)$ 及 $z(\beta)$ 分别称为 C 的起点和终点；对满足 $\alpha < t_1 < t_2 < \beta$ 的 t_1 及 t_2，当 $z(t_1) = z(t_2)$ 成立时，点 $z(t_1)$ 称为此曲线的重点；没有重点的连续曲线，称为简单曲线或若尔当曲线；$z(\alpha) = z(\beta)$ 的简单曲线称为简单闭曲线

简单曲线是 z 平面上的一个有界闭集

例如，线段、圆弧、其他光滑曲线弧段、折线、简单闭曲线

定义（长度） 设连续弧 AB 的参数方程为

$z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$

任取实数列 $\{t_j\}$

$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$

并且考虑 AB 弧上对应的点列：

$z_j = z(t_j) \quad (j=0,1,2,\cdots,n)$

将它们用一折线 C_n 连接起来，C_n 的长度

$L_n = \sum_{j=1}^{n}|z(t_j)-z(t_{j-1})|$

如果对所有的数列，L_n 有上界，则 AB 弧称为可求长的，上确界 $L = \sup L_n$ 称为 AB 弧的长度

定义（光滑） 设简单（或简单闭）曲线 C 的参数方程为

$z = x(t)+iy(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$

又在 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上，$x(t)$ 及 $y(t)$ 存在、连续且不全为零，则 C 称为光滑（闭）曲线

光滑（闭）曲线 C 只有连续转动的切线

定义（逐段光滑） 由有限段光滑曲线衔接而成的连续曲线称为逐段光滑曲线

逐段光滑曲线必定可求长曲线；但简单曲线（或简单闭曲线）却不一定可求长

e.g. 设简单曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x(t) = t\sin\frac{1}{t} \quad t \neq 0 \text{ 时} \\ \quad\quad 0 \quad\quad t = 0 \text{ 时} \\ y(t) = t\cos\frac{1}{t} \quad t \neq 0 \text{ 时} \\ \quad\quad 0 \quad\quad t = 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

显然：$A_n(\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}})$，$B_n(\frac{1}{2n\pi}, 0)$ 皆为曲线上的点，且连接 A_nB_n 两点线段之长

$A_nB_n = \sqrt{(\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}})^2+(\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}})^2}$

$\geq \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi} > \frac{1}{2(n+1)\pi}$

比较级数可知 $\sum_{n=1}^{\infty}A_nB_n$ 发散，从而此曲线不是不可求长的

容易看出，图周 $|z|=R$ 把 z 平面分为两个不相连接的区域 $|z|<R$ 和 $|z|>R$，这个结果是下面的若尔当定理的特例

若尔当定理 任一简单闭曲线 C 将 z 平面唯一分成 C、$I(C)$ 及 $E(C)$ 三个点集，它们具有如下性质：

(1) 彼此不交

(2) $I(C)$ 是一个有界区域（称为 C 的内部）

(3) $E(C)$ 是一个无界区域（称为 C 的外部）

(4) 若简单折线 P 的一个端点属于 $I(C)$，另一端点属于 $E(C)$，则 P 必与 C 有交点

关于曲线的正方向、负方向、单连通区域、复连通区域等其余知识，大多已在数分/高数中提到，故不展开

§3 复变函数、复球面与复数远点

（参考《复变函数论》钟玉泉、《数学物理方法》梁昆淼）

1. 复变函数的定义

若在复数平面（或球面）上的一个点集 E（复数的集合），对于 E 的每一点（每一个 z 值），按照一定的规律，有一个或多个复数值 w 与之对应，则称 w 为 z 的函数——复变函数，z 称为 w 的自变量，定义域为 E，记作

$w = f(z) \quad z \in E$

在复变函数论中，主要研究的解析函数（将在后面提到）

2. 复变函数的极限与连续性

定义（极限） 设函数 $w=f(z)$ 于点集 E 上有定义，z_0 为 E 的聚点，如存在一复数 w_0，使对任给的 $\varepsilon > 0$，有 $\delta > 0$，只要 $0 < |z-z_0| < \delta$，$z \in E$，就有

$|f(z)-w_0| < \varepsilon$

则称函数 $f(z)$ 沿 E 于 z_0 有极限 w_0，并记为

$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in E}} f(z) = w_0$

它的定义与数学分析中一元实变函数的极限定义相似，我们可以仿照证明而有以下结论

(1) 若极限存在，则必唯一

(2) 若 $f(z)$、$g(z)$ 沿点集 E 在点 z_0 有极限，则其和、差、乘、商（在商的情况分母的极限不等于零）沿点集 E 在点 z_0 的极限，也就是极限值等于 $f(z)$、$g(z)$ 在点 z_0 的极限值的和、差、积、商

注：极限 $\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in E}} f(z)$ 与 z 趋向 z_0 的方式无关

定义（连续） 设函数 $w=f(z)$ 于点集 E 上有定义，z_0 为 E 的聚点，且 $z_0 \in E$，若

$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in E}} f(z) = f(z_0)$

即对任给 $\varepsilon > 0$，有 $\delta > 0$，只要 $|z-z_0| < \delta$，$z \in E$，就有

$|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$

则称 $f(z)$ 沿 E 于 z_0 连续

将复变函数 $f(z)$ 的实部和虚部分别记作 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$，有

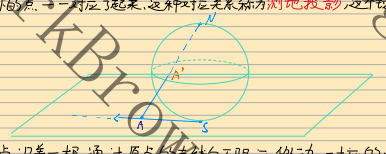
$f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$

则此时，复变函数 $f(z)$ 在点 $z_0 = x_0+iy_0$ 连续 的定义可归结为

当 $\begin{cases} x \to x_0 \\ y \to y_0 \end{cases}$ 时，$\begin{cases} u(x,y) \to u(x_0,y_0) \\ v(x,y) \to v(x_0,y_0) \end{cases}$

3. 复球面与无穷远点、扩充复平面

之前我们将本来为有限的复数、限复数平面上的有限点一一对应在点上，在复变函数论中，通常还将本来为无限大的复数、也就是复平面上的点相对应，并称这一点为无限远点，关于无限远点，可作如下理解：把一个球放在复数平面上，球以南极 S 限复数平面相切于原点，在复数平面上任取一点 A，它与球的北极 N 的连线就球面相交于 A' 点，这样复数平面上的有限远点就球面上 N 以外的点一一对应了起来，这种对应关系称为测地投影，这个球称为复数球



设想 A 点沿着一根通过原点的直线向无限远处动，对应的点 A' 就沿着一根通过球心的直线（丝线）向北极 N 逼近，若 A 沿着任意的曲线向无限远处动，A' 总是相应地沿着某曲线逼近于 N。因此，可以将平面上的无穷远点看作一点，通过测地投影而与复数球上北极 N 相对应，我们将无限远点记作 ∞，它的模为无限大，它的辐角没有明确意义

复平面加上点 ∞ 后称为扩充复平面，常记作 C_∞，$C_\infty = C+\{\infty\}$

以下给出在扩充复平面上的几个概念：

(i) 扩充复平面上，无穷远点的邻域应理解为以原点为圆心、包含某个圆周的外部，即 ∞ 的 ε 邻域 $N_\varepsilon(\infty)$ 是指满足条件 $|z| > \frac{1}{\varepsilon}$ 的点集，它对应着复球面以北极点 N 为心的一个球盖，∞ 的去心邻域是指 $\frac{1}{\varepsilon} < |z| < +\infty$，它对应着去掉北极点的一个球盖

(ii) 内点、聚点、边界点 均可推广到点 ∞，于是复平面以 ∞ 为其唯一的边界点；扩充复平面以 ∞ 为内点，且没有边界，此时若尔当定理依然成立

(iii) 在扩充复平面上，点 ∞ 可以包含在函数的定义域中，函数的极限与连续性概念有所推广，在关系式

$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

中，如果 z_0 及 $f(z_0)$ 之一或它们同取 ∞，就称 $f(z)$ 在点 z_0 为广义连续的，极限称为广义极限，此时极限和连续的 $\varepsilon-\delta$ 语言要相应地修改，

例如在 $z_0 = \infty$，$f(\infty) = \infty$ 时，$f(z)$ 在 $z=\infty$ 连续的 $\varepsilon-\delta$ 说法应修改为

任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，只要 $|z| > \frac{1}{\delta}$，就有

$|f(z)-f(\infty)| < \varepsilon$

以后只要不加"扩充"二字，它均指通常的复平面

FxMarkBrown's Blog