复数与复变函数

- **复数**
  - 复数
    - $z=x+iy$
      - 实部Re z=a，虚部Im z=b
  - 复平面
    - 模
      - $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$
        - $-|z|<Re\ z<|z|$
          $-|z|<Im\ z<|z|$
          $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|,||z_1|-|z_2||\le|z_1-z_2|$（三角不等式）
          $|z_1+z_2+\cdots+z_n|\le|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$
    - 距离
      - $d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$
    - 辐角
      - $\theta=Arg\ z$
        - 主辐角
          - $-\pi\le\arg z\le\pi$
          - $\theta=\arg z+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2\cdots$
          - $\arg z=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x} & x>0;y>=<0\\ \frac{\pi}{2} & x=0;y>0\\ -\frac{\pi}{2} & x=0;y<0\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & x<0;y\ge0\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi & x<0;y<0\end{cases}$
  - 复数的三角形式与指数形式
    - 代数形式
      - $z=x+iy$
    - 三角形式
      - $z=|r|(\cos\theta+i\sin\theta)$
    - 指数形式
      - $z=|r|e^{i\arg z}$
      - 利用指数形式作乘除法较为简单
  - 复数的乘幂与次方根
    - $|z^n|=|z|^n$
      $Arg\ z^n=nArg\ z$
    - $|\sqrt[n]{z}|=\sqrt[n]{|z|}=|\sqrt[n]{r}|$
      $Arg\sqrt[n]{z}=\frac{Arg\ z}{n}=\frac{\theta+2k\pi}{n}$
  - 共轭复数
    - $|\overline{z}|=|z|$
      $Arg\ \overline{z}=-Arg\ z$
      - (1) $\overline{(\overline{z})}=z,\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$
        (2) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2},\overline{(\frac{z_1}{z_2})}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\ne0)$
        (3)$|z|^2=z\overline{z},Re\ z=\frac{z+\overline{z}}{2},Im\ z=\frac{z-\overline{z}}{2}$
        (4)设$R(a,b,c,\cdots)$表示对复数$a,b,c,\cdots$的任意有理运算，则$\overline{R}(a,b,c,\cdots)$
  - *复数在几何上的应用举例及多元数
- **复平面上的点集**
- **复变函数**
  - 定义
    - 若在复数平面（或球面上）存在一个点集E，对于E的每一个点（每一个z值），都有一个或多个复数值ω与其对应，
      则称ω为z的函数——复变函数，z为ω的宗量,定义域为E，记作
      $\omega=f(z),z\in E$
    - 在复变函数论中，主要研究的是解析函数
  - 复变函数的极限与连续性
    - 极限
      - 设函数$\omega=f(z)$于点集E上有定义，z_0为E的聚点，如存在一复数ω_0使对任给的$\epsilon>0$，有$\delta>0$，只要$0<|z-z_0|<\delta,z\in E$，就有
        $|f(z)-\omega_0|<\epsilon$
        则称函数$f(z)$沿E于z_0有极限ω_0。并记为
        $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\omega_0$
      - 极限 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$与$z$趋于$z_0$的方式无关
    - 连续
      - 设函数$\omega=f(z)$于点集E上有定义，z_0为E的聚点，且$z_0\in E$，若
        $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\omega_0$
        即对任给$\epsilon>0$，有$\delta>0$，只要$|z-z_0|<\delta,z\in E$，就有
        $|f(z)-f(z_0)|<\epsilon$
        则称$f(z)$沿E于z_0连续
      - 将复变函数$f(z)$的实部和虚部分别记作$u(x,y)$和$v(x,y)$，有
        $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$
        则此时，复变函数$f(z)$在点$z_0=x+iy_0$连续的定义为可归结为
        当$\begin{cases}x\to x_0\\ y\to y_0\end{cases}$时$\begin{cases}u(x,y)\to u(x_0,y_0)\\ v(x,y)\to v(x_0,y_0)\end{cases}$
- **复球面与无穷远点，扩充复平面**