

第一章 概率论的基本概念

§1 随机试验

- 特点
1. 可在相同的条件下重复地进行
 2. 每次试验的可能出现的结果不止一个, 并且事先明确试验的所有可能结果
 3. 进行一次试验之前, 可能知道一个或多个结果会出现

在概率论中, 我们将具有上述三个特点的实验称为**随机试验**.

§2 样本空间和随机事件

(一) 样本空间和随机事件

样本空间: 随机试验 E 的所有可能结果组成的集合. 样本空间的元素, 即 E 的每个结果, 称为**样本点**.
随机事件: 试验 E 的样本空间中 S 的某些元素的随机事件, 简称事件, 当且仅当这一集合中的样本点出现时, 称这一事件发生.
特别地, 由一个样本点组成的单点集, 称为**基本事件**. 样本空间中 S 包含所有的样本点, 称为**必然事件**, 空集 $\emptyset$ 称为**不可能事件**.

(二) 事件间的关系与运算

设试验 E 的样本空间为 S , 而 $A, B, A_k (k=1, 2, \dots)$ 是 S 的子集

1. 若 $A \subset B$, 则称事件 B 包含 A , A 发生 B 必发生.
特别地, 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 即 $A=B$ 则称事件 A, B 相等
2. 若事件 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为事件 A 与 B 的**和事件**, 当且仅当 A, B 至少有一个发生时, 事件 $A \cup B$ 发生
3. 事件 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ (或 $A \cap B$) 称为 A 与 B 的**积事件**, 当且仅当 A, B 同时发生时事件 $A \cap B$ 发生
4. 事件 $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称为事件 A 与 B 的**差事件**, 当且仅当 A 发生 B 不发生时事件 $A - B$ 发生
5. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A, B 互不相容 (互斥), A, B 不能同时发生
6. 若 $A \cap B = B$ 且 $A \cup B = S$ 则称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**, 又称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**. $\bar{A} = S - A$

§3 频率与概率

(一) 频率

定义: 在相同条件下, 进行 n 次试验, 在这 n 次试验中, 事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**, 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**, 并记为 $f_n(A)$

由定义, 常见频率具有下述基本性质

1. $0 \leq f_n(A) \leq 1$
2. $f_n(S) = 1$
3. 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是两两互不相容的事件, 则
 $f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_n)$

(二) 概率

定义: 设 E 是随机试验, S 是它的样本空间, 对于 E 的每一事件, 赋予一个实数, 记为 $P(A)$, 称为事件 A 的**概率**. 如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件:

1. 非负性: 对于每一个事件 A , 有 $P(A) \geq 0$
2. 规范性: 对于必然事件 S , 有 $P(S) = 1$
3. 可列可加性: 设 $A_1, A_2, \dots$ 是两两互不相容事件, 即对于 $A_i A_j = \emptyset$ (当 $i, j=1, 2, \dots$ 有 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$)

性质:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. (有限可加性): 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是两两互不相容事件, 则
 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

3. 设 A, B 是两个事件, 若 $A \subset B$, 则有
 $P(B - A) = P(B) - P(A)$

$$P(B) \geq P(A)$$

4. 对任一事件 A $P(A) \leq 1$

5. (逆事件的概率) 对立事件 $A, \bar{A}$ 有
 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

6. (加法公式) 对任意两事件 A, B 有
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (来自容斥原理)

§4 等可能概率型 (古典概型)

古典概型: 1. 试验的样本空间只有有限个元素
2. 试验中每个基本事件发生的可能性相同

具有以上两个特点的实验称为**等可能概率型**, 也称**古典概型**

等可能概率型中事件 A 的概率的计算公式
若事件 A 包含 k 个基本事件, 即 $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$, 这里 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ 是 $1, 2, \dots, n$ 中某 k 个不同的数, 则

$$P(A) = \frac{\sum_{i=1}^k P(\{\omega_i\})}{\sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\})} = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{S \text{ 中基本事件的总数}}$$

例: 袋中有 a 只白球, b 只黑球, 共 $a+b$ 只球, 每次从袋中取一只球

(1) 作放回抽样

(2) 作不放回抽样

求第 i ($i=1, 2, \dots, k$) 次取到白球的概率 $P(A_i)$ 的概率 ($k \leq a+b$)

(1) 放回抽样时, 显然有

$$P(A_i) = \frac{a}{a+b}$$

(2) 共有 $(a+b)(a+b-1) \dots (a+b-k+1) = A_{a+b}^k$ 种取法

取白球时, 先取球, 最后一人一定取到球, 一个白球

然后求取人在选其他球

$$A_{a+b-1}^{k-1}$$

$$\Rightarrow P(A_i) = \frac{C_a^1 A_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^k} = \frac{a}{a+b}$$

即 $P(A_i)$ 与 i 无关

例: 在 $1 \sim 2000$ 的整数中随机地取一个数, 问取到的数能被 6 整除的概率是多少

解: 设 A 为事件“取到的数能被 6 整除”

设 B 为事件“取到的数能被 5 整除”

则 $P(A \cap B) = P(A \cap B) - P(A \cap B)$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

(1) $P(A) = \frac{2000}{6} \approx 334$

(2) $P(B) = \frac{2000}{5} = 400$

(3) $P(A \cap B) = \frac{2000}{30} \approx 67$

又能被 6 和 5 整除的数能被 30 整除, 因此

$$63 \leq \frac{2000}{30} < 64$$

于是 $P(A \cap B) = \frac{63}{2000}$

故所求概率为 $p = 1 - (\frac{334}{2000} + \frac{400}{2000} - \frac{63}{2000}) = \frac{1}{2}$

实际推断原理: 概率很小的事件在一次试验中几乎是不发生的, 若它在一次试验中竟发生了, 则有理由怀疑假设的正确性

§5 条件概率

(一) 条件概率

定义: 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 和

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

称为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**

不难验证: 条件概率 $P(B|A)$ 是定义中的三个条件, 即

1. 非负性: 对于事件 B , 有 $P(B|A) \geq 0$
2. 规范性: 对于必然事件 S , 有 $P(S|A) = 1$
3. 可列可加性: 设 $B_1, B_2, \dots$ 是两两互不相容的事件, 则有
 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i | A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A)$

(二) 乘法原理

乘法原理: 设 $P(A) > 0$, 则有

$$P(AB) = P(B|A)P(A)$$

此式容易推广到多个事件的积事件的情况, 例如, 设 A, B, C 为事件, 且 $P(A) > 0$, 则有

$$P(ABC) = P(C|AB)P(B|A)P(A)$$

此时由假设 $P(AB) > 0$ 也可推得 $P(A) > 0$, 则有

推广: 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个事件, $n \geq 2$, 且 $P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0$, 则有
 $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1}) P(A_{n-1} | A_1 A_2 \dots A_{n-2}) \dots P(A_2 | A_1) P(A_1)$

例: 袋中有 r 只红球, t 只白球, 每次自袋中取一只球, 观察其颜色后放回, 然后再放入一只与所取出的球颜色相同的球, 若在袋中连续取球四次, 试求第一次、第二次、第三次、第四次取到红球的概率

以 $A_i (i=1, 2, 3, 4)$ 表示事件“第 i 次取到红球”, 则

$$P(A_1 A_2 A_3 A_4) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) P(A_4 | A_1 A_2 A_3)$$

故 $P(A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{r}{r+t} \cdot \frac{r+1}{r+t+1} \cdot \frac{r+2}{r+t+2} \cdot \frac{r+3}{r+t+3}$

例: 设某仪器由工厂制造的, 第一次落下时打破的概率为 $\frac{1}{2}$, 若第一次落下未打破, 第二次落下打破的概率为 $\frac{1}{3}$, 若前两次落下未打破, 第三次落下打破的概率为 $\frac{1}{4}$, 试求该仪器落下三次而未打破的概率

以 $A_i (i=1, 2, 3)$ 表示事件“该仪器第 i 次落下打破”, 以 $\bar{A}_i$ 表示事件“该仪器第 i 次落下而未打破”

$$P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) P(\bar{A}_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2)$$

$$= (1 - \frac{1}{2}) (1 - \frac{1}{3}) (1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{20}$$

(三) 全概率公式与贝叶斯公式

定义: 设 S 是试验 E 的样本空间, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 E 的一组事件, 若

- (1) $B_i B_j = \emptyset (i \neq j), i, j=1, 2, \dots, n$
- (2) $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$

则称 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为样本空间 S 的一个划分

定理 1: 设试验 E 的样本空间为 S , A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(B_i) > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ 则
 $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)$

上式称为**全概率公式**
左根号: 问题中 $P(A)$ 不易求得, 但容易求得 S 的一个划分 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 且 $P(B_i)$ 和 $P(A|B_i)$ 或为已知, 或容易求得, 则可以根据上式求得 $P(A)$

定理 2: 设试验 E 的样本空间为 S , A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分, 且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 则
 $P(B_i | A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)}$

上式称为**贝叶斯公式**

例: 对以往数据进行分析表明, 当机器调整良好时, 产品的合格率为 98% , 而当机器发生某种故障时, 其合格率为 55% , 每天早上上班开工时, 机器开动时, 机器调整良好的概率为 95% , 试求已知某天上午第一件产品是合格品时, 机器调整良好的概率

设 A 为事件“产品合格”, B_1 为事件“机器调整良好”, 已知 $P(A|B_1) = 0.98, P(A|B_2) = 0.55, P(B_1) = 0.95$

$$P(B_1 | A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{0.98 \times 0.95}{0.98 \times 0.95 + 0.55 \times 0.05} = 0.97$$

这就是说, 当生产出一件合格品时, 此时机器调整良好的概率为 0.97

这里, 概率 0.97 是由以往的数据分析得到的, 叫做**经验概率**, 而在得到信息 (即生产出的第一件产品是合格品) 之后再重新计算以估计的概率 (即 0.97) 叫做**后验概率**, 有时, 我们还可以通过机器指示器进一步了解

§6 独立性

定义: 设 A, B 是两个事件, 如果满足等式

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件 A, B 相互独立, 简称 A, B 独立

定理 1: 设 A, B 是两个事件, 且 $P(A) > 0$, 若 A, B 相互独立, 则 $P(B|A) = P(B)$. 反之亦然

定理 2: 若事件 A, B 相互独立, 则下列各对事件也相互独立

$$A \text{ 与 } \bar{B}, \bar{A} \text{ 与 } B, \bar{A} \text{ 与 } \bar{B}$$

推广到三个事件的情况

定义: 设 A, B, C 是三个事件, 如果满足等式

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

$$P(AC) = P(A)P(C)$$

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

则称事件 A, B, C 相互独立

推广: 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 $n(n \geq 2)$ 个事件, 如果其中任意 2 个, 任意 3 个, ..., 任意 n 个事件的积事件的概率, 都等于各事件概率之积, 则称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立

由定义, 可以得到以下两个推论:

1. 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n (n \geq 2)$ 相互独立, 则其中任意 k 个事件也是相互独立的
2. 若 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 则将 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意 k 个事件换成它们的对立事件, 所得的 k 个事件也相互独立

例: 要装配一批 $C(100, 2)$ 型设备, 每台设备需 2 只元件, 设元件来自两个厂家, 其中 1 号元件合格率为 95% , 2 号元件合格率为 90% , 若 2 号元件不合格, 则设备不合格, 试求该设备合格的概率

设 $H_i (i=0, 1, 2, 3)$ 表示事件“随机地取 2 只元件, 其中有 i 只元件合格”, H_0, H_1, H_2, H_3 是 S 的一个划分, 以 A 表示事件“该设备合格”, $P(A) = 1 - P(H_0) - P(H_1) - P(H_2) - P(H_3)$, 试求 $P(A)$

$$P(H_0) = \frac{C_2^{100-95}}{C_2^{100}} = \frac{C_2^5}{C_2^{100}} = \frac{1}{95 \times 94}$$

$$P(H_1) = \frac{C_1^{100-95} C_1^{95}}{C_2^{100}} = \frac{100 \times 95}{95 \times 94}$$

$$P(H_2) = \frac{C_2^{100-95} C_2^{95}}{C_2^{100}} = \frac{C_2^5 \times 95 \times 94}{C_2^{100}}$$

$$P(H_3) = \frac{C_2^{100-95} C_2^{95}}{C_2^{100}} = \frac{C_2^5 \times 95 \times 94}{C_2^{100}}$$

$$P(A) = 1 - P(H_0) - P(H_1) - P(H_2) - P(H_3) = 0.975$$

例: 甲、乙两人进行乒乓球比赛, 每局甲胜的概率为 p , $p > \frac{1}{2}$. 问对甲而言, 采用三局两胜制有利, 还是采用五局三胜制有利? 若采用哪种赛制对甲最有利?

三局两胜制: 甲甲 / 乙甲甲 / 甲乙甲

$$p_1 = p^2 + 2p^2(1-p)$$

五局三胜制: 甲甲甲 / 乙甲甲 / 甲乙甲 / 甲乙甲

$$p_2 = p^3 + C_3^2 p^2(1-p) + C_3^1 p(1-p)^2$$

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} p^2 (1-p)^2 (2p-1)$$

可知当 $p > \frac{1}{2}$ 时, $p_2 > p_1$, $p = \frac{1}{2}$ 时 $p_2 = p_1$

当 $p > \frac{1}{2}$ 时五局三胜制对甲最有利, $p = \frac{1}{2}$ 时两种赛制对甲最有利