概率论的基本概念

几个概念

- 随机试验E
- 样本空间S：所有可能结果组成的集合
- 样本点：随机试验E的每个结果
- 随机事件（又称事件）：样本空间S的子集称为随机实验E的随机事件
  - 基本事件：由一个样本点组成的单点集
  - 必然事件：即集合S本身
  - 不可能事件：即空集

事件间的关系与事件的运算

- 由于事件是用集合表示的，事件间的关系与事件的运算均遵循集合论
- 事件相等A=B：即事件集合相等
- 和事件AUB：即事件集合的并集
- 积事件AB：即事件集合的交集
- 差事件A-B：即事件集合的差，A发生B不发生
- 事件互不相容（又称互斥）：即A与B不能同时发生，也即AB为空集
- 事件对立：即A与B不能同时发生，但必有一个发生，也即AB为空集，AUB=S
  - 此时$B=\overline{A}, \overline{A}=S-A$
  - B是A的逆事件

频率与概率

- 频率与频数
- 概率
  - 性质（非负性/规范性/可列可加性(互不相容事件)）
    - $P(\emptyset)=0$
    - 有限可加性：互不相容事件$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$
    - 设A,B是两个事件，若$A\subset B$，则有：
      - $P(B-A)=P(B)-P(A)$
      - $P(B)\geq P(A)$
      - 对于任一事件$A, P(A)\leq 1$
      - 逆事件的概率$P(\overline{A})=1-P(A)$
      - ⭐加法公式
        - 对于任意两事件A, B, 有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

古典概型

- 试验特点
  - 1.试验的样本空间只包含有限个元素
  - 2.试验中每个基本事件发生的可能性相同
- 概率计算
  - $P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(\{e_{i_j}\})=\dfrac{A\text{中包含的基本事件总数}}{S\text{中包含的基本事件总数}}$
- 实际推断原理
  - 概率很小的事件在一次试验中几乎不可能发生
  - 如果此概率极小的事件发生，则有理由怀疑假设的正确性

条件概率

- 定义
  - A，B是两个事件，且$P(A)>0$，称$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{A}$为在事件A发生的条件下事件B发生的条件概率
- 性质（非负性/规范性/可列可加性(互不相容事件)）
- 乘法定理
  - 设$P(A)>0$，则有$P(AB)=P(B|A)P(A)$
  - 一般，设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为n个事件，$n\geq 2$，且$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2|A_1)P(A_1)$
- 全概率公式和贝叶斯公式
  - 划分
    - 设S为试验E的样本空间, $B_1, B_2, \cdots, B_n$为E的一组事件. 若满足以下两个条件，则称$B_1, B_2, \cdots, B_n$为样本空间S的一个划分
      - (i)$B_iB_j=\emptyset, i\neq j, j=1,2,\cdots,n$
      - (ii)$B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$
  - 全概率公式
    - 设试验E的样本空间为S，A为E的事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$为S的一个划分, 且$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$
    - $P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+\cdots+P(A|B_n)P(B_n)$称为全概率公式
  - 贝叶斯公式
    - 设试验E的样本空间为S，A为E的事件，$B_1, B_2, \cdots, B_n$为S的一个划分, 且$P(A)>0, P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$
    - $P(B_i|A)=\dfrac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}$称为贝叶斯公式
    - 先验概率和后验概率

独立性

- 定义
  - 设A, B是两事件，如果满足等式$P(AB)=P(A)P(B)$，则称A, B相互独立，简称A, B独立
  - 容易知道，若$P(A)>0$，$P(B)>0$，则A, B相互独立与A, B互不相容不能同时成立
- 定理
  - 定理1：设A, B是两事件，且$P(A)>0$.若A, B相互独立，则$P(B|A)=P(B)$，反之亦然
  - 定理2：若事件A, B相互独立，则$\overline{A}$与B，A与$\overline{B}$，B与$\overline{A}$与相互独立
    - 1.若事件$A_1, A_2, \cdots, A_n(n\geq 2)$相互独立，则其中任意$k(2\leq k\leq n)$个事件也是互相独立的
    - 2.若n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n(n\geq 2)$相互独立，则将$A_1, A_2, \cdots, A_n$中任意多个事件换成它们各自的对立事件, 所得的$n$个事件仍相互独立