随机变量及其分布

随机变量

- 为了解决样本空间S中的元素不为数时的研究不便而产生
- 定义
  - 设随机试验的样本空间为$S=\{e\}$. $X=X(e)$是定义在样本空间S上的实值单值函数. 称$X=X(e)$为随机变量

离散型随机变量及其分布律

- 离散型随机变量：全部可能取到的值是有限个或无限个的随机变量
- 分布律
  - 定义：设离散型随机变量X所有可能取的值为$x_k(k=1,2,\cdots)$, X取各个可能值的概率, 即事件$\{X=x_k\}$的概率为$P(X=x_k)=p_k, k=1,2,\cdots$
  - 也可用表格的形式来表示
- 几种分布
  - (0-1)分布（两点分布）
    - $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}, k=0,1(0<p<1)$
  - 二项分布
    - 伯努利试验E（只有两种结果）以及n重伯努利试验（E独立重复进行n次）
    - $X\sim b(n,p)$时$P\{x=k\}=\binom{n}{k}p^kq^{1-k}$
  - 泊松分布
    - 考虑二项分布n趋于无穷大，p趋于无穷小
    - $X\sim\pi(\lambda)$时$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^ke^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots$
    - 泊松定理
      - 设$\lambda>0$是一个常数，n是任意正整数，设$np_n=\lambda$，则对于任一固定的非负整数k，有$\lim\limits_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\dfrac{\lambda^ke^{-\lambda}}{k!}$

n=1

极限情况

随机变量的分布函数

- 对于单随机变量，实际上是将1按照某种密度“分配”到了数轴上，此时概率变为了数轴某一段的“长度”，在有概率密度函数时表现为其下方的面积
- 定义
  - 设X是一个随机变量，x是任意实数，函数$F(x)=P\{X\le x\}$，$-\infty<x<\infty$称为X的分布函数
- 性质（非减函数/负无穷处极限为0,正无穷处极限为1/右连续）

“概率分布”

离散型随机变量

连续型随机变量

连续型随机变量及其概率密度

- 连续型随机变量
  - 定义
    - 若对于随机变量X的分布函数$F(x)$，存在非负可积函数$f(x)$，使对于任何实数x有$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt$，则称$X$为连续型随机变量，$f(x)$称为$X$的概率密度函数, 简称概率密度
  - 概率密度的性质
    - $1. f(x)\ge 0$
    - $2. \int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$
    - 3.对于任意实数$x_1,x_2(x_2\le x_1)$，$P\{x_1\le X\le x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$
    - 4.若$f(x)$在点x处连续, 则有$F'(x)=f(x)$. 反之, 若$f(x)$具备性质1和2，引入$G(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$，它是由某一随机变量$X$的分布函数，$f(x)$是$X$的概率密度
  - *:连续型随机变量取任一指定实数的概率为0
    - 据此，计算落在某一区间的连续型随机变量的概率时，可以不用考虑区间开闭
    - 若A是不可能事件，则$P(A)=0$；若$P(A)=0$，则A不一定是不可能事件
- 几种分布
  - 均匀分布
    - X在区间(a,b)上服从均匀分布，则$X\sim U(a,b)$
    - 概率密度$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$
    - 分布函数$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{b-a} & a\le x<b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$
  - 指数分布
    - 概率密度$\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$
    - 期望$\dfrac{1}{\lambda}$，方差$\dfrac{1}{\lambda^2}$
    - 无记忆性
      - $P\{X>s+t|X>s\}=P\{X>t\}$
  - Gamma分布
    - X服从$Gamma$分布，则$X\sim Gamma(k,\lambda)$
    - 概率密度$f(x)=\dfrac{\lambda^k}{\Gamma(k)}x^{k-1}e^{-\lambda x},\alpha>0,\beta>0$，分布函数$\dfrac{\gamma(k,\lambda x)}{\Gamma(k)}$（其中$\gamma(k,\lambda x)=\int_0^{\lambda x}t^{k-1}e^{-t}dt$）
    - 期望$\dfrac{k}{\lambda}$，方差$\dfrac{k}{\lambda^2}$
  - 帕累托分布
    - X服从帕累托分布，则$X\sim Pareto(\alpha,x_m)$
    - 概率密度$f(x)=\{\begin{matrix}\frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}} & x\ge x_m\\ 0 & \text{其他}\end{matrix}$，分布函数$F(x)=1-(\dfrac{x_m}{x})^\alpha(x\ge x_m)$
    - 期望$\dfrac{\alpha x_m}{\alpha-1}(\alpha>1)$，方差$\dfrac{\alpha x_m^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}(\alpha>2)$
  - 正态分布（高斯分布）
    - X服从高斯（正态）分布，则$X\sim N(\mu,\sigma^2)$
    - 概率密度$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$，分布函数$F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$
    - 期望μ，方差σ^2
    - 性质
      - 1.曲线关于$x=\mu$对称，有$P\{\mu-h\le X\le\mu\}=P\{\mu\le X\le\mu+h\}$
      - 当$x=\mu$时取到最大值$f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
    - 标准正态分布
      - $\mu=0,\sigma=1$
      - 概率密度此时称为$\phi(x)$，分布函数称为$\Phi(x)$
      - $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$
      - 重要变换：若随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，可通过$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$将其变换为$Z\sim N(0,1)$，此时Z称为X的标准化变量
      - 3σ原则

随机变量的函数的分布

- 不同离散型随机变量之间分布函数（分布律）的关系
- 不同连续型随机变量分布函数之间的关系
- 不同连续型随机变量概率密度函数之间的关系
  - 设随机变量X具有概率密度$f_N(x),-\infty<x<\infty$，又设函数$g(x)$处处可导且恒有$g'(x)>0$(或恒有$g'(x)<0$)，则$Y=g(x)$是连续型随机变量，其概率密度为$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]|h'(y)| & \alpha<y<\beta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$
  - 在g(x)单调性不能保证时，不可使用上面的，而要严格遵循定义求解
    - 1.讨论y的概率密度不为零的范围
    - 2.对于概率密度不为零的范围，讨论Y概率分布函数为$F_Y(y)$时概率P关于随机变量X的解集
    - 3.由分布函数和概率的关系，将关于随机变量X的概率P的解集表示为X分布函数$F_X(h(y))$的运算
    - 由分布函数和概率密度函数的关系，对等式两边求导得$f_Y(y)$和$f_x(h(y))$的关系