大数定律及中心极限定理

大数定律

弱大数定律（辛钦大数定律）

设$X_1, X_2, \cdots,$是相互独立，服从同一分布的随机变量序列，且具有数学期望$E(X_k) = \mu(k = 1, 2, \cdots)$. 作前$n$个变量的算术平均$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{x} X_k$，则对于任意$\epsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu| < \epsilon\} = 1$$

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立，服从同一分布且具有数学期望$E(X_k) = \mu(k = 1, 2, \cdots)$，则序列$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$依概率收敛于$\mu$，即

$$\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$$

伯努利大数定律（推论）

设f_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数，p是事件A在每次试验中发生的概率，则对于任意$\epsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| < \epsilon\} = 1$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{f_A}{n} - p| \geq \epsilon\} = 0$$

中心极限定理（正态近似）

独立同分布的中心极限定理

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立，服从同一分布，且具有数学期望和方差：$E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2 > 0(k = 1, 2, \cdots)$，则随机变量之和$\sum_{k=1}^{n} X_k$的标准化变量

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数$F_n(x)$对于任意x满足

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\} = \Phi(x)$$

李雅普诺夫（Lyapunov）定理

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立，且它们具有数学期望和方差

$E(X_k) = \mu_k, D(X_k) = \sigma_k^2 > 0(k = 1, 2, \cdots)$

记$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$

若存在正数δ，使得当$n \to \infty$时，

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} E\{|X_k - \mu_k|^{2+\delta}\} \to \infty$$

则随机变量之和$\sum_{k=1}^{n} X_k$的标准化变量

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} \mu_k}{B_n}$$

的分布函数$F_n(x)$对于任意x满足

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} \mu_k}{B_n}\} = \Phi(x)$$

棣莫弗-拉普拉斯（De Moivre-Laplace）定理（二项分布的正态近似）

设随机变量$\eta_n (n = 1, 2, \cdots)$服从参数为$n, , p(0 < p < 1)$的二项分布，则对于任意$x$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\} = \Phi(x)$$

相比较于泊松近似（当$n \to \infty, p \to 0, \lambda \leq 10$时效果较好），正态近似适用于$n \to \infty$而$p$接近0.5时的近似情况

特殊情况