行列式

引子

- **有向面积的引入**
  - 对于有向面积$\delta(\cdot,\cdot)$，它对于向量a_1,a_2组成的平行四边形应满足
    - 1.双线性：$\delta(ka_1+k'a_1',a_2)=k\delta(a_1,a_2)+k'\delta(a_1',a_2)$
    - 2.反对称：$\delta(a_1,a_2)=-\delta(a_2,a_1)$
    - 3.共线为零：$\delta(a,a)=0$
    - 4.归一化条件：$\delta(e_1,e_2)=1$
  - 当看作矩阵$A=[a_1\quad a_2]$的函数时，记为$\delta(A)$，又叫线性变换A的变积系数
    - 1.$\delta(AE_{ii;k})=k\delta(A);\delta(AE_{ij;k})=\delta(A),i,j=1,2;$
    - 2.$\delta(AP_{12})=-\delta(A)$
    - 3.如果A不满秩，则$\delta(A)=0$
    - 4.$\delta(I_2)=1$

行列式函数

- **定义**
  - 定义在全体n阶方阵上的函数δ，如果满足如下性质则就称其为一个n阶行列式函数
    - 1.列多线性：对每个列向量都线性，即对任意$i=1,2,\cdots,n$，都有$\delta(\cdots,ka_i+k'a_i',\cdots)=k\delta(\cdots,a_i,\cdots)+k'(\cdots,a_i',\cdots)$
    - 2.列反对称：对任意$i,j=1,2,\cdots,n$，且$i<j$，都有$\delta(\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots)=-\delta(\cdots,a_j,\cdots,a_i,\cdots)$
    - 3.单位化：$\delta(I_n)=1$
  - 此函数在n阶方阵存在且唯一，其值A的行列式，记为$\det(A)$或$|A|$
- **性质**
  - 1.如果方阵A有两列相等，则$\det(A)=0$
  - 2.如果方阵A不满秩，即不可逆，则$\det(A)=0$
  - 3.如果方阵A有一列为零或有一行为零，则$\det(A)=0$
  - **在初等矩阵上**
    - 1. $\det(P_{ij})=-1$
    - 2. $\det(E_{ii;k})=k$
    - 3. $\det(E_{jj;k})=1$
  - **运算**
    - 1.对初等矩阵E，则$\det(AE)=\det(A)\det(E)$
    - 2.设可逆矩阵$A=E_1E_2\cdots E_m$，其中E_i为初等矩阵，则$\det(A)=\det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_m)$
    - 3. $\det(A)\neq 0$当且仅当A可逆
    - 4. $\det(AB)=\det(A)\det(B)$
    - 5. $\det(A)=\det(A^T)$
  - **在矩阵上**
    - 1.把A的某行的倍数加到另一行，某列的倍数加到另一列，其行列式不变
    - 2.把A的两行或两列对调，其行列式变为原来的相反数
    - 3.把A的某行或某列乘以k，其行列式变为原来的k倍

行列式的展开式

- **余子式和代数余子式**
  - **余子式**
    - 给定n阶方阵$A,n\geq 2$，令$A\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix}$表示从$A$中划去第$i$行和第$j$列得到的$n-1$阶方阵，则$M_{ij}=\det(A\begin{pmatrix}i\\j\end{pmatrix})$称为元素$a_{ij}$的余子式
  - **代数余子式**
    - $C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素a_{ij}的代数余子式
- **行列式按行按列展开（拉普拉斯展开）**
  - 按第j列展开：$\det(A)=a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\cdots+a_{nj}C_{nj}$
  - 按第i行展开：$\det(A)=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots+a_{in}C_{in}$
- **逆矩阵公式**
  - 对可逆矩阵A，$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}C^T$
  - 其中C是由A的代数余子式组成的矩阵，C^T又常称A的补矩阵（伴随矩阵）
- **克拉默法则**
- **行列式完全展开**
  - **排列和对换**
    - **定义**
      - 将正整数$1,2,\cdots,n$按一定顺序排列起来得到$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$称为一个排列或置换
      - 对调排列中两个数的顺序，称为对该排列施加一次对换
    - 排列σ，如果可以经过奇数次对换得到$1,2,\cdots,n$，则称为奇排列，如果可以经过偶数次对换得到$1,2,\cdots,n$，则称为偶排列
    - **排列的符号**
      - 对排列σ，如果它是奇排列，则定义其符号为$sign(\sigma)=-1$，否则为1
  - **行列式完全展开**
    - 1. $\det(A)=\sum_{\text{排列}\sigma}sign(\sigma)a_{\sigma_1 1}a_{\sigma_2 2}\cdots a_{\sigma_n n}$
    - 2.1. $\det(A)=\sum_{\text{排列}\sigma}sign(\sigma)a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots a_{n\sigma_n}$