子空间和维数

基本概念

- **满射**
  - 线性映射A是满射，当且仅当对任意$b \in R^m$，线性方程组$A(x) = Ax = b$有解
  - 线性映射A是单射当且仅当$\mathcal{R}(A) = R^m$
- **单射**
  - 线性映射A是单射，当且仅当线性方程组$Ax = 0$只有唯一解0
    - 其中$\mathcal{R}(A) = \{b \in R^m, Ax = b\} = \{Ax | x \in R\} \subseteq R^m$
    - 也可以说“此线性映射的像集等于其陪域”
  - 线性映射A是单射当且仅当$\mathcal{N}(A) = \{0\}$
    - 其中$\mathcal{N}(A) = \{x \in R | Ax = 0\} \subseteq R^n$
    - 也可以说“0的原像唯一”
- **子空间**
  - 定义：$\mathcal{M}$是线性空间R^m的非空子集，如果加法和数乘在此空间封闭，则称M为R^m的一个(线性)子空间
    - 特别的，R^m有两个平凡子空间，即$\{0\}$和R^m自身，二者分别是最小和最大子空间
    - R^m的任意子空间都包含零向量，空集不是子空间
  - **几个概念**
    - $\mathcal{R}(A)$是R^m的子空间，称为矩阵的列（向量）空间
      - 向量$b \in \mathcal{R}(A)$当且仅当它可以被列向量$a_1, a_2, \cdots, a_n$线性表示，即当且仅当线性方程组$Ax = b$有解
    - $\mathcal{N}(A)$是R^n的子空间，称为矩阵A的零空间，也是齐次方程组$Ax = 0$的解空间
    - R^n的子空间$\mathcal{R}(A^T)$由A的行向量转置线性生成，因此称为矩阵A的行（向量）空间
    - $\mathcal{N}(A^T)$是R^m的子空间，称为矩阵A的左零空间，也是齐次方程组$x^T A = 0$的解空间
    - 在为列向量时相等
- **线性生成**
  - 定义：设S：$a_1, a_2, \cdots, a_n$是R^m中的向量组，其线性组合的全体构成R^m的一个子集
  - 记为$span(S) = span(a_1, a_2, \cdots, a_n) := \{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n | k_1, k_2, \cdots, k_n \in R\}$，而$a_1, a_2, \cdots, a_n$称为该集合的一组生成向量
  - **与子空间的关系**
    - 设S是R^m中的向量组，则：
    - 子集$span(S)$是R^m的子空间
    - 如果S中的向量都在R^m的某个子空间中，则$span(S)$中的向量也都在此子空间中
- **线性相关与线性无关**
  - 线性相关：给定R^m中的向量组$a_1, a_2, \cdots, a_n$，如果存在不全为零的一组数$k_1, k_2, \cdots, k_n \in R$，使得$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n = 0$，则称向量组$a_1, a_2, \cdots, a_n$线性相关
    - 等价于零向量的线性表示不唯一，也等价于上齐次方程组有非零解，等价于此线性映射不为单射
  - 线性无关：$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n = 0$一定给出$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$，此时称向量组$a_1, a_2, \cdots, a_n$线性无关
    - 等价于零向量有唯一的线性表示，即平凡表示，也等价于上齐次方程组只有零解，等价于此线性映射为单射
- **子空间的基**
  - 给定R^m的子空间$\mathcal{M}$，若$\mathcal{M}$中存在有限个向量$a_1, a_2, \cdots, a_n$满足以下两个条件时可以称这个向量组为子空间$\mathcal{M}$的一组基
    - $\mathcal{M}$中的任意向量都可以被该向量组线性表示，即$\mathcal{M} = span(a_1, a_2, \cdots, a_n)$
    - 该向量组线性无关
  - **与矩阵可逆的关系：**
    - 设m阶方阵$A = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$，则$a_1, a_2, \cdots, a_m$是$R^m$的一组基当且仅当$A$可逆
      - 由可逆得$Ax = 0$只有零解，等价于线性映射是单射，等价于列向量之间线性无关
      - 由可逆得$Ax = b$总有解，即对于$b \in R^m$总有$span(a_1, a_2, \cdots, a_n) = R^m$
  - **与表示法的关系：**
    - 给定R^m的子空间$\mathcal{M}$，则$\mathcal{M}$中的向量组$a_1, a_2, \cdots, a_n$是$\mathcal{M}$的一组基，当且仅当该向量组满足：
      - $\mathcal{M}$中的任意向量都可以被该向量组线性表示，即$\mathcal{M} = span(a_1, a_2, \cdots, a_n)$
      - 而且表示法唯一
  - 等价
  - 极大线性无关组与该组向量生成空间的基等价

基和维数

- **向量的线性关系**
  - **极大线性无关部分组**
    - 任意有限个不全为零的向量组成的向量组$a_1, a_2, \cdots, a_n$都存在极大线性无关组
    - 给定R^m中的向量组$a_1, a_2, \cdots, a_n$，设它的一个部分组是$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$，如果满足以下两个条件，则称前是后的一个极大线性无关部分组
      - 1.$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$线性无关
      - 2.$a_1, a_2, \cdots, a_n$可以被$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$线性表示
    - **寻找线性无关组**
      - 筛选法
  - 给定向量组的任意两个极大线性无关组一定线性等价
  - **向量组的线性等价**
    - **向量组间的线性表示**
      - 设S：$a_1, a_2, \cdots, a_n$；T：$b_1, b_2, \cdots, b_p$是R^m中的两个向量组，以下叙述等价
        - S可以被T线性表示
        - 存在$p \times n$的矩阵U满足$[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_p] U$
        - 线性生成的子空间$span(a_1, a_2, \cdots, a_n) \subseteq span(b_1, b_2, \cdots, b_p)$
      - 如果两个向量组可以 相互 线性表示，则称二者线性等价，它是一种等价关系
        - 特别地，如果一个向量和某个向量组等价，则称该向量组中的向量共线
      - **线性表示向量组中向量个数的关系**
        - 设向量组$a_1, a_2, \cdots, a_n$可以被$b_1, b_2, \cdots, b_p$线性表示
          - 1.如果$n > p$，则$a_1, a_2, \cdots, a_n$线性相关
          - 2.如果a_1, a_2, a_n线性无关，则$n \leq p$
        - **粗略地说**
          - 1.如果一个向量个数多的向量组可以用向量个数少点向量组线性表示，则多的向量组中一定有“多余”的向量
          - 2.如果一个向量组线性无关，即没有多余的向量时，那么只有向量个数不少于它的向量组才可表示它
    - ⭐线性等价关系中的重要不变量：秩
      - 推论：设向量组$a_1, a_2, \cdots, a_n$和$b_1, b_2, \cdots, b_p$线性等价，如果两个向量组都线性无关，则$n = p$
      - 定义：一个向量组S的任意一个极大线性无关部分组中的向量个数称为这个向量组的秩，记为rank(S).一个只包含零向量的向量组的秩定义为0
- **基和维数**
  - **基**
    - **基存在定理**
      - 给定R^m的子空间$\mathcal{M}$，若$\mathcal{M} \neq \{0\}$，则$\mathcal{M}$存在一组基，且基中向量个数不大于M
    - **基扩充定理**
      - 设$\mathcal{M}$，$\mathcal{N}$是R^m的子空间，且$\mathcal{M} \neq \{0\}$. 如果$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$，则$\mathcal{M}$的任意一组基都能扩充成$\mathcal{N}$的一组基
  - **维数**
    - 一个子空间$\mathcal{M}$的任意一组基向量的个数称为这个子空间的维数，记为$\dim \mathcal{M}$，平凡子空间$\{0\}$的维数定义为零
    - **一些定理**
      - 1.线性空间R^m的维数为m
      - 2.设$\mathcal{M}$是R^m的子空间，则$\dim \mathcal{M} \leq m$
      - 3.设$\mathcal{M}, \mathcal{N}$是R^m的两个子空间，且$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$，则$\dim \mathcal{M} \leq \dim \mathcal{N}$
      - 4.设$\mathcal{M}$是R^m的r维子空间，给定$\mathcal{M}$中含有r个向量的向量组$a_1, a_2, \cdots, a_r$
        - 1.如果$a_1, a_2, \cdots, a_r$线性无关，则$a_1, a_2, \cdots, a_n$是$\mathcal{M}$的一组基
        - 2.如果$\mathcal{M} = span(a_1, a_2, \cdots, a_r)$，则$a_1, a_2, \cdots, a_r$是$\mathcal{M}$的一组基

矩阵的秩

- **定义**
  - 矩阵A的列空间维数$\dim \mathcal{R}(A)$称为矩阵A的秩，记为$rank(A)$
- **初等行变换前后矩阵部分组的关系**
  - 设矩阵$A = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$与矩阵$B = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]$左相抵($A$经过一系列初等行变换化成$B$)，则：
    - 1.部分组$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$线性无关当且仅当对应的部分组$b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_r}$线性无关
    - 2.A的列$a_j (j = 1, 2, \cdots, n)$可以被部分组$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$线性表示，即$a_j = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_r a_r$当且仅当$B$对应的列$b_j$可以被对应的部分组$b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_r}$线性表示，且表示法相同
    - 3.部分组$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$是$A$的列向量组的极大线性无关部分组当且仅当相对应的部分组$b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_r}$是$B$的列向量组的极大线性无关部分组
- **重要命题：rank(A)等于A化成的阶梯形矩阵的阶梯数**
  - 矩阵行秩等于列秩

线性方程组的解集

- **秩-零化度定理**
  - 对于$m \times n$矩阵，$rank(A)$(或$\dim \mathcal{R}(A)$) $+ nullity$(或$\dim \mathcal{N}(A)$) $= n$
  - 对于$m \times n$矩阵，$rank(A^T)$(或$\dim \mathcal{R}(A^T)$) $+ \dim \mathcal{N}(A^T) = m$
- **非齐次线性方程组和其导出方程组的关系**
  - 设线性方程组$Ax = b$的一个特解是k_0，其导出方程组的解空间$\mathcal{N}(A)$的一组基是$k_1, k_2, \cdots, k_{n-r}$，其中$r = rank(A)$，则$Ax = b$的解集就是$\{k_0 + c_1 k_1 + c_2 k_2 + \cdots + c_{n-r} k_{n-r} | c_1, c_2, \cdots, c_{n-r} \in \mathbb{R}\}$
  - 即“非齐次通解=齐次通解+非齐次特解”
- **判定定理**
  - 对n个变量的线性方程组$Ax = b$，它的解有如下情形：
    - 1.它有解，当且仅当$rank(A) = rank([A \quad b])$
    - 2.它有唯一解，当且仅当$rank(A) = rank([A \quad b]) = n$
    - 3.它有无穷多组解，当且仅当$rank(A) = rank([A \quad b]) < n$