内积和正交性

基本概念

- 内积
  - 定义
    - 定义$\mathbb{R}^n$上的两个列向量a,b的内积为实数a^Tb，即如果$a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$，则$a,b$的内积为$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$
  - 性质（对称/双线性/正定）
- 向量的范数
  - $||a||=\sqrt{a^Ta}$
- 单位向量，非零向量的单位化向量，向量之间的距离（欧氏）
- 向量的柯西-施瓦兹不等式、三角不等式和勾股定理
- 标准正交基
  - 正交向量组和正交单位向量组
    - ⭐正交向量组线性无关
  - 定义
    - 设$\mathcal{M}$是R^n的子空间，如果它的一组基是正交向量组，则称之为$\mathcal{M}$的一组正交基；如果它的一组基是正交向量组，则称之为$\mathcal{M}$的一组标准正交基
  - 任意向量在正交基下的分解
    - 设$q_1,q_2,\cdots,q_n$是$\mathbb{R}^n$的一组标准正交基，则对任意向量a，都有分解式$a=(q_1^Ta)q_1+(q^Ta)q_2+\cdots+(q_n^Ta)q_n$
  - Gram-Schmidt正交化
    - $\widetilde{q_1}=a_1$
      $\widetilde{q_2}=a_2-\frac{\widetilde{q_1}^Ta}{\widetilde{q_1}^T\widetilde{q_1}}\widetilde{q_1}$
      $\widetilde{q_3}=a_3-\frac{\widetilde{q_1}^Ta}{\widetilde{q_1}^T\widetilde{q_1}}\widetilde{q_1}-\frac{\widetilde{q_2}^Ta}{\widetilde{q_2}^Tq_2}q_2$
      $\cdots$
    - 为得到标准正交基，将每个向量再单位化即可

正交矩阵与QR分解

- 正交矩阵（方阵）
  - n阶方阵Q满足$Q^TQ=I_n$
  - 性质
    - 1.Q为保距变换，即，对任意$x\in\mathbb{R}^n$，有$||Qx||=||x||$
    - 2.Q为保内积变换，即，对任意$x,y\in R^n$, Qx与Qy的内积等于x与y的内积
- QR分解
  - 可逆矩阵的QR分解
    - 设A是n阶可逆矩阵，则存在唯一的分解$A=QR$，其中Q是正交矩阵，R是对角元都是正数的上三角矩阵
  - 一般矩阵的QR分解
    - 列正交矩阵
      - 矩阵Q若满足$Q^TQ=I_n$则称为列正交矩阵
    - 对$m\times n$矩阵A，其中$m\geq n$，则
      - 1.存在$m\times n$列正交矩阵Q_1和具有非负对角元的n阶上三角矩阵R_1，使得$A=Q_1R_1$（简化QR分解）
      - 2.进一步地，存在m阶正交矩阵Q和$m\times n$矩阵R，使得$A=QR$，其中$R=\begin{bmatrix}R_1\\O\end{bmatrix}$, $Q=[Q_1\quad Q_2]$即Q的列向量组由Q_1的列向量组扩充而成

子空间和投影

- 正交补
  - 定义
    - 给定$\mathbb{R}^n$的子空间$\mathcal{M}$，$\mathbb{R}^n$的子集$M^\perp:=\{a\in\mathbb{R}^n|a\perp\mathcal{M}\}$称为$\mathcal{M}$的正交补
  - 性质
    - 1.$\mathcal{M}\cap\mathcal{M}^\perp=\{0\}$
    - 2.$\dim\mathcal{M}^\perp=n-\dim\mathcal{M}$
    - 3.$(\mathcal{M}^\perp)^\perp=\mathcal{M}$
    - 4.对任意$a\in\mathbb{R}^n$，都存在唯一的分解$a=a_1+a_2$，使得$a_1\in\mathcal{M}$，$a_2\in\mathcal{M}^\perp$
  - 几大空间的关系
    - 行空间$\mathcal{R}(A^T)$和零空间$\mathcal{N}(A)$互为正交补
    - 列空间$\mathcal{R}(A)$和左零空间$\mathcal{N}(A^T)$互为正交补
- 正交投影
  - 定义
    - 给定$\mathbb{R}^n$的子空间$\mathcal{M}$，线性变换$P_\mathcal{M}: a\mapsto a_1$称为子空间$\mathcal{M}$上的正交投影（变换），而$a_1=P_\mathcal{M}(a)$称为向量$a$在$\mathcal{M}$上的正交投影
    - 显然$I=P_\mathcal{M}+P_{\mathcal{M}^\perp}$
  - 给定$\mathbb{R}^n$的子空间$\mathcal{M}$和向量a，$a_1=P_\mathcal{M}(a)$为a在$\mathcal{M}$上的正交投影，则$||a-a_1||=\min_{x\in\mathcal{M}}||a-x||$
  - 正交投影的表示矩阵
    - 定义
      - 给定矩阵A，其列空间上的正交投影的表示矩阵$P_{\mathcal{R}(A)}$，称为关于A的正交投影矩阵，简记为P_A
    - 标准正交基时
      - 设$Q=[q_1\quad q_2\quad\cdots\quad q_r]$是$\mathcal{M}$的一组标准正交基，$P_\mathcal{M}=Q_rQ_r^T$是其正交投影矩阵
    - 非标准正交基时
      - 若A^TA满秩
        - $P_A=A(A^TA)^{-1}A^T$
      - 若A^TA补满秩，即不可逆
        - 考虑先求出A的一组基排为矩阵B，然后使用上面的方法求解
  - 当A是可逆方阵时，正交投影就是恒同变换，即向量在$\mathbb{R}^n$上的正交投影就是自身，因此$P_A=I$
  - 给定n阶方阵P，则P是正交投影矩阵，当且仅当$P^2=P^T=P$
- 最小二乘问题
  - 定义
    - $\min_{x\in\mathbb{R}^n}||r||=\min_{x\in\mathbb{R}^n}||b-Ax||$
  - 最小二乘解
    - $||b-P_Ab||=\min_x||b-Ax||$是最小二乘问题的一个解
    - 最小二乘问题的解集是$\{x_0+x_1|x_1\in\mathcal{N}(A)\}$，$x_0$是一个特解
  - 正则化方法和正交化方法求解最小二乘问题