行列式

- 全排列和对换
  - 全排列
    - 定义
      - 把n个不同的元素排成一行
    - 定义一个特定的全排列为"标准排列"（一般为从左到右从小到大）
  - 逆序数
    - 定义
      - 当某一对元素的先后次序与标准次序不同时，就说它构成一个逆序
      - 一个排列中所有的逆序的总数叫做这个排列的逆序数
    - 逆序数为奇数的排列叫做奇排列，反之为偶排列
  - 对换
    - 相邻对换
      - 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性
      - 奇排列兑换成标准排列的兑换次数为奇数，偶排列为偶数
    - 行列式的常见对换结论
      - （1）行列式上下翻转，左右翻转（逆时针转90°） $D' = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$
      - （2）行列式沿主对角线翻转（转置），副对角线翻转 $D' = D$
  - n阶行列式
    - 常见行列式
      - 下（上三角形行列式）
        $$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$
      - 对角行列式
        $$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$
      - 范德蒙德行列式
        $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$
  - 行列式的性质
    - （1）行列式和它的转置行列式相等
    - （2）对换行列式的两行，行列式变号
      - （推论）若行列式有两行（列）完全相同，则此行列式等于零
    - （3）行列式的某一行（列）中所有的元素都乘同一数k，等于用数k乘此行列式
      - （推论1）行列式中某一行（列）的所有公因子可以提到行列式记号的外面
      - （推论2）行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零
    - （4）若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，则行列式可以被拆分为两个行列式
      $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
    - （5）把行列式的某一行（列）的各元素乘同一个数后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式不变
  - 行列式按行按列展开
    - 代数式和代数余子式 $A_{ij} = (1)^{i+j}M_{ij}$
    - 按行按列展开
      - （引理）一个n阶行列式，如果其中第i行所有元素除(i,j)元a_{ij}外都为零，那么这个行列式等于a_{ij}与它的代数余子式的乘积，即$D = a_{ij}A_{ij}$
      - （按行按列展开法则）行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots a_{in}A_{in} (i = 1, 2, \cdots, n)$
        - （推论）行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad i \neq j$