矩阵

线性方程组和矩阵

- （系数矩阵）$A=(a_{ij})$，（未知数矩阵）$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，（常数项矩阵）$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$，（增广矩阵）$B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}$
- 对角线矩阵$\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n)$，当各项为1时为单位矩阵$E$　特别地，$\Lambda^{-1}=diag(\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\frac{1}{\lambda_3},\cdots,\frac{1}{\lambda_n})$
- 伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$（$A$的代数余子式得到的矩阵转置获得的矩阵）
  - 性质
    - $AA^*=A^*A=|A|E$
    - $|A^*A|=|A||A^*|=|A|^n$，可得$|A^*|=|A|^{n-1}$（$n>1$）

矩阵的运算

- 矩阵加法
  - *同型矩阵才可相加
  - 运算律：交换/结合
- 矩阵数乘
  - 运算律：结合/分配（可分配数，也可分配矩阵）

（矩阵加法与矩阵数乘：矩阵的线性运算）

- 矩阵乘法
  - 一个mxs的矩阵和sxn的矩阵相乘可获得一个mxn的矩阵
  - *第一个矩阵的列必须等于第二个矩阵的行才可相乘
  - 运算律：结合（数或矩阵）/分配 /交换（一般情况下仅限与数，不适用矩阵!!!）
  - 方针的幂
    - $A^1=A,A^2=A^1A^1,\cdots,A^{k+l}=A^kA^l,(A^k)^l=A^kA^l$
    - 如果两矩阵可交换（如任意矩阵和纯量矩阵），则矩阵的完全平方公式和平方差公式成立
    - 特别地，$A=P\Lambda P^{-1},A^k=P\Lambda^kP^{-1}$
- 矩阵转置
  - 运算律
    - $(A^T)^T=A$
    - $(A+B)^T=A^T+B^T$
    - $(\lambda A)^T=\lambda A^T$
    - $(AB)^T=B^TA^T$
  - 对称矩阵：$A^T=A$
  - 矩阵为零矩阵的充要条件：$A^TA=0$(不可为AA^T)
- 方阵的行列式
  - 运算律
    - $|A^T|=|A|$
    - $|\lambda A|=\lambda^n|A|$
    - $|AB|=|A||B|$
    - $|A|=\dfrac{1}{|A^{-1}|}$

逆矩阵

- 矩阵可逆的条件
  - 定义：$AB=BA=E$
  - 充要条件：$|A|\neq0$（此时也称矩阵是非奇异矩阵）
- 矩阵的m次多项式
  - $\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$
  - 特别地，当A为对角线矩阵Λ时，$\varphi(\Lambda)=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1)&&&\\&\varphi(\lambda_2)&&\\&&\ddots&\\&&&\varphi(\lambda_n)\end{pmatrix}$，即此时的$\varphi(\Lambda)$可以被归结为各$(i,j)$元的数的运算

克拉默法则

- 适用于解决方程个数与未知数个数相等并且系数行列式不为零的线性方程

矩阵分块法

- 分块对角矩阵$\begin{pmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_s\end{pmatrix}$
  - 分块对角矩阵的逆矩阵与对角线矩阵的逆矩阵相同
- 副分块对角矩阵$A=\begin{pmatrix}&&&A_1\\&&A_2&\\&\cdot&&\\A_s&&&\end{pmatrix}$
  - 它的逆矩阵为$A=\begin{pmatrix}&&&A_s^{-1}\\&&\cdot&\\&A_2^{-1}&&\\A_1^{-1}&&&\end{pmatrix}$