矩阵的初等变换与线性方程组

矩阵的初等变换

- 包括
  - 行（列）对换
  - 以数乘某一行中的所有元
  - 以数乘某一行（列）加到另一行（列）
- 性质
  - 反身性 $A \sim A$
  - 对称性 若$A \sim B$，则$B \sim A$
  - 传递性 若$A \sim B, B \sim C$, 则$C \sim A$
- 高斯消元
  - 行阶梯形矩阵 + （1）非零行的首元为1 （2）首元所在的列的其他元均为0
  - 行最简形矩阵
  - 标准形 $F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$
  - 初等变换
- 行（列等价存在的条件）
  - （1）$A \overset{r}{\sim} B$的充要条件是存在m阶可逆矩阵P，使得$PA = B$
  - （2）$A \overset{c}{\sim} B$的充要条件是存在n阶可逆矩阵Q，使得$AQ = B$
  - （3）$A \sim B$的充要条件是存在m阶可逆矩阵P及n阶可逆矩阵Q，使得$PAQ = B$
  - 对A施加行变换和列变换相当于A左乘和右乘另一个初等矩阵（E经过一次初等变换获得）
    - ⭐方阵可逆的充要条件是$A \overset{r}{\sim} E$

矩阵的秩

- 矩阵的k阶子式
  - 引理：$A \overset{r}{\sim} B$，则A与B中非零子式的最高阶数相等
  - 定义：任取矩阵k行与k列交叉处的元素组成的行列式
- 定义 矩阵的最高阶非零子式的个数
- 性质
  - （1）$0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$
  - （2）R（A^T）$= R(A)$
  - （3）$A \sim B$，则$R(A) = R(B)$
  - （4）若P, Q可逆，则$R(PAQ) = R(A)$
  - （5）$\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$
    - 特别地，当$B = b$为非零列向量时，有$R(A) \le R(A, b) \le R(A) + 1$
  - （6）$R(A + B) \le R(A) + R(B)$
  - （7）$R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$
  - （8）若$A_{m\times n}B_{n\times l} = O$, 则$R(A) + R(B) \le n$
  - 若A为列满秩矩阵，且$A_{m\times n}B_{n\times l} = C$，则$R(B) = R(C)$

线性方程组的解

- 有解（相容）的判断
  - 非齐次
    - 对n元线性方程组$Ax = b$
    - （1）无解的充要条件是$R(A) < R(A, b)$
    - （2）有唯一解的充要条件是$R(A) = R(A, b) = n$
    - （3）有无限多解的充要条件是$R(A) = R(A, b) < n$
  - 齐次
    - n元齐次线性方程组$Ax = 0$有非零解的充要条件是$R(A) < n$
- 扩展到矩阵方程
  - 矩阵方程$AX = B$有解的充要条件为$R(A) = R(A, B)$
  - 定理（7）的扩展：设$AB = C$，则$R(C) \le \min\{R(A), R(B)\}$