第4章 向量组的线性相关性

§1 向量组及其线性组合

定义1 n个有次序的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 所组成的数组称为n维向量，这n个数称为该向量的n个分量，第i个数称为第i个分量

n维向量可写成一行，也可写成一列，按第2章中的规定，分别称为行向量和列向量，也就是行矩阵和列矩阵，并规定行向量和列向量都按矩阵的运算规则进行运算，因此

n维列向量

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

与n维行向量

$$\vec{a}^T=(a_1 \cdots a_n)$$

总看作两个不同的向量

几何中"空间"通常是作为点的集合，即构成"空间"的元素是点，这样的空间叫做点空间，我们把3维向量的全体所组成的集合

$$R^3=\{\vec{r}\mid \vec{r}=(x,y,z)^T,\ x,y,z\in R\}$$

叫做3维向量空间，在点空间取定坐标系后，空间中的点 $P(x,y,z)$ 与3维向量 $\vec{r}=(x,y,z)^T$ 之间一一对应，因此向量空间可类比为取定了坐标系的点空间，在讨论向量的运算时把向量看作有向线段，在讨论向量集时则把向量 r 看作以 r 为向径的点 P，从而把点P的轨迹作为向量集的图形，例如点集

$$\Pi=\{P(x,y,z)\mid ax+by+cz=d\}$$

是一个平面，于是向量集

$$\{\vec{r}\mid r=(x,y,z)^T,\ ax+by+cz=d\}$$

也叫做向量空间 R^3 中的平面，并把 Π 作为它的图形

若干个同维数的列向量（或同维数的行向量）所组成的集合叫做向量组，例如一个 $m\times n$ 矩阵的全体列向量是一个含n个m维列向量的向量组，它的全体行向量是一个含m个n维行向量的向量组

矩阵的列向量组和行向量组都只含有限个向量的向量组，反之，一个含有限个向量的向量组总可构成一个矩阵，含有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应

定义2 给定向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$，对于任一组实数 $k_1, \cdots, k_m$，表达式

$$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\cdots+k_m\vec{a}_m$$

称为向量组A的一个线性组合，$k_1, k_2, \cdots k_m$ 称为这个组合的系数

给定向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 和向量 b，若存在一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$，使

$$b=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_m\vec{a}_m$$

则向量b是向量组A的线性表示，也就是方程组

$$x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\cdots+x_m\vec{a}_m=\vec{b}$$

有解，由上章定理5，立即得

定理1 向量 $\vec{b}$ 能由向量组 $A: \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 线性表示的充要条件是矩阵 $A=(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$ 的秩等于矩阵 $B=(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m, \vec{b})$ 的秩

定义3 设有两个向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 及 $B: b_1, b_2, \cdots, b_l$，若向量组B中的每个向量都能由向量组A线性表示，则称向量组B能由向量组A线性表示，若向量组A与向量组B能相互线性表示，则称这两个向量组等价

把向量组A和B所构成的矩阵依次记作 $A=(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$ 和 $B=(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_l)$，向量组B能由向量组A线性表示，即对每个向量 $b_j\ (j=1,2,\cdots,l)$，存在数 $k_{1j}, k_{2j}, \cdots, k_{mj}$，使

$$b_j=k_{1j}a_1+k_{2j}a_2+\cdots+k_{mj}a_m=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m)\begin{pmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{mj}\end{pmatrix}$$

从而

$$(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l)=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1l}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2l}\\\vdots&&&\vdots\\k_{m1}&k_{m2}&\cdots&k_{ml}\end{pmatrix}$$

这里，矩阵 $K_{m\times l}=(k_{ij})$ 称为这一线性表示的系数矩阵

由此可知，若 $C_{m\times n}=A_{m\times l}B_{l\times n}$，则矩阵C的列向量组能由矩阵A的列向量组线性表示，B为这一表示的系数矩阵

$$(c_1,c_2,\cdots,c_n)=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_l)\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\b_{l1}&b_{l2}&\cdots&b_{ln}\end{pmatrix}$$

同时，C的行向量组能由B的行向量组线性表示，A为这一表示的系数矩阵

$$\begin{pmatrix}\gamma_1^T\\\gamma_2^T\\\vdots\\\gamma_m^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1l}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2l}\\\vdots&&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{ml}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\\\vdots\\\beta_l^T\end{pmatrix}$$

设矩阵A与B行等价，即矩阵A经初等行变换变成矩阵B，则B的每个行向量都是A的行向量组的线性组合，即B的行向量组能由A的行向量组线性表示，由于初等变换可逆，知矩阵B亦可经初等行变换变为A，从而A的行向量组也能由B的行向量组线性表示，于是A的行向量组与B的行向量组等价

类似可知，若矩阵A与B列等价，则A的列向量组与B的列向量组等价

按定义3，向量组 $B: b_1, b_2, \cdots, b_l$ 能由向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性表示，其含义是存在矩阵 $K_{m\times l}$，使

$$(b_1,b_2,\cdots,b_l)=(a_1,a_2,\cdots,a_m)K$$

也就是矩阵方程

$$(a_1,a_2,\cdots,a_m)X=(b_1,b_2,\cdots,b_l)$$

有解，由上章定理6，立即可得

定理2 向量组 $B: b_1, b_2, \cdots, b_l$ 能由向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 的秩等于矩阵 $(A,B)=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m,\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_l)$ 的秩，即

$$R(A)=R(A,B)$$

推论：向量组 $A: a_1, a_2, \cdots a_m$ 与向量组 $B: b_1, b_2, \cdots, b_l$ 等价的充要条件是

$$R(A)=R(B)$$

证：因向量组A与向量组B能相互线性表示，依据定理2，知它们等价的充要条件是

$$R(A)=R(A,B) \qquad R(B)=R(B,A)$$

而 $R(A,B)=R(B,A)$，合起来即得条件为

$$R(A)=R(B)=R(A,B)$$

例1：设

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}\quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}\quad \vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$$

证明向量 $\vec{b}$ 能由向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 线性表示，并求出表达式

$\vec{b}$ 能由 $\vec{a}$ 线性表示 $\Rightarrow$ $Ax=b$ 有解 $\Rightarrow$ $R(A)=R(A,b)$

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_4-2r_1}}{\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-2r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&-1&2&1\\0&1&-2&-1\end{pmatrix}\ \overset{\substack{r_3+r_2\\r_4-r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ \overset{r_1-r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(A)=R(A,b)$ 所以可以线性表示

$$\begin{cases}x_1+3x_3=2\\x_2-2x_3=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2-3x_3\\x_2=-1+2x_3\\x_3=x_3\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \vec{b}=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(2-3c)\vec{a}_1+(-1+2c)\vec{a}_2+c\vec{a}_3$$

例2：设

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix}\quad \vec{b}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}\quad \vec{b}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}\quad \vec{b}_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

证明向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ 与 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ 等价

由定理2推论，可知充要条件为 $R(A)=R(B)=R(A,B)$

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\-1&1&0&1&-1\\1&1&1&0&2\\-1&3&1&2&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_2+r_1\\r_3-r_1\\r_4+r_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&4&2&2&2\\0&-2&-1&-1&-1\\0&6&3&3&3\end{pmatrix}\ \overset{\substack{r_2\times\frac12\\r_3+r_2\\r_4-3r_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&2&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $R(A)=2 \quad R(A,B)=2$

易知矩阵B中有不等于0的2阶子式，故 $R(B)\geq 2$

又 $R(B)\leq R(A,B)=2$

$\therefore$ $R(B)=2=R(A)=R(A,B)$

故等价

定理3：设向量组 $B: \vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_l$ 能由向量组 $A: \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 线性表示，则 $R(b_1, b_2, \cdots, b_l)\leq R(a_1, a_2, \cdots, a_m)$

证：记 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$，$B=(b_1, b_2, \cdots, b_l)$，按定理的条件，根据定理2有 $R(A)=R(A,B)$，而 $R(B)\leq R(A,B)$，因此

$$R(B)\leq R(A)$$

该定理与上章定理7对应，按定理3此时存在矩阵K使 $B=AK$，从而由上章定理7得 $R(B)\leq R(A)$

例3：设n维向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 构成 $n\times m$ 矩阵 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$，n阶单位矩阵 $E=(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的列向量叫做n维单位坐标向量

证明：n维单位坐标向量组 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ 能由向量组A线性表示的充要条件为 $R(A)=n$

$\Rightarrow R(A)=R(A,E)$

而 $R(A,E)\geq R(E)=n$，又 (A,E) 含n行，因此 $R(A,E)\leq n$

$\Rightarrow R(A)=R(A,E)=n$

本例所证的结论用矩阵语言可叙述为

对矩阵 $A_{n\times m}$，存在矩阵 $K_{m\times n}$ 使 $AK=E_n$ 的充要条件是 $R(A)=n$

也可叙述为

矩阵方程 $A_{n\times m}X=E_n$ 有解的充要条件是 $R(A)=n$

§2 向量组的线性相关性

定义4 给定向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$，若存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 使

$$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m=0$$

则称向量组A是线性相关的，否则称它为线性无关

向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m\ (m\geq 2)$ 线性相关的充要条件是在向量组A中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示

向量组 $A: a_1, a_2, \cdots a_m$ 构成矩阵 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$，向量组A线性相关，就是齐次线性方程组

$$x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m=0$$

即 $Ax=0$ 有非零解，由上节定理4立得

定理4 向量组 $A: a_1, a_2, \cdots a_m$ 线性相关的充分必要条件是它所构成的矩阵 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 的秩小于向量个数m；向量组A线性无关的充要条件是 $R(A)=m$

e.g. 已知向量 a_1, a_2, a_3 线性无关，$b_1=a_1+a_2$，$b_2=a_2+a_3$，$b_3=a_3+a_1$，试证向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关

证法1：设有 x_1, x_2, x_3 使

$$x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=0$$

$$\Rightarrow x_1(a_1+a_2)+x_2(a_2+a_3)+x_3(a_3+a_1)=0$$

$$\Rightarrow (x_1+x_3)a_1+(x_1+x_2)a_2+(x_2+x_3)a_3=0$$

有方程组

$$\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_1+x_2=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$$

由于此方程组的系数矩阵

$$K=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

的行列式 $|K|=2\neq 0$，故方程组只有零解 $x_1=x_2=x_3=0$，故 b_1, b_2, b_3 线性无关

证法2：把已知的三个向量等式写成一个矩阵形式

$$(b_1\ b_2\ b_3)=(a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

记作 $B=AK$，设 $BX=0$，以 $B=AK$ 代入得 $A(KX)=0$，因为矩阵A的列向量组线性无关，故知 $KX=0$，又 $|K|=2\neq0$ 知 $KX=0$ 只有零解 $X=0$，故 b_1, b_2, b_3 线性无关

证法3：把已知条件合写成

$$(b_1\ b_2\ b_3)=(a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

记作 $B=AK$，因 $|K|=2\neq0$ 知K可逆，根据上章所述矩阵秩的性质⑥知 $R(B)=R(A)$，因此A的列向量组线性无关，根据定理4知 $R(A)=3$，从而 $R(B)=3$，再由定理4知B的3个列向量线性无关，即 b_1, b_2, b_3 线性无关

线性相关是向量组的一个重要性质，下面介绍与之有关的一些简单结论

定理5 (1) 若向量组 $A: a_1, a_2, \cdots, a_m$ 线性相关，则向量组 $B: a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{m+1}$ 也线性相关，反之，若向量组B线性无关，则向量组A也线性无关

(2) m个n维向量组成的向量组，当维数n小于向量个数m时一定线性相关，特别地，n+1个n维向量一定线性相关

(3) 设向量组 $A: a_1, a_2, \cdots a_m$ 线性无关，而向量组 $B: a_1, a_2, \cdots, a_m, b$ 线性相关，则向量b必能由向量组A线性表示，且表示式是唯一的

结论(1)是对向量组增加1个向量而言的，增加多个向量结论也仍然成立，即设向量组A是向量组B的一部分（这时称向量组A是向量组B的部分组），于是结论(1)可一般地叙述为：

一个向量组若有线性相关的部分组，则该向量组线性相关，特别地，含零向量的向量组必线性相关，一个向量组若线性无关，则它的任何部分组都线性无关

§3 向量组的秩

在上两节的讨论中向量组只局限于含有限个向量，现我们将去掉这一限制：向量组可以含无限个向量

例如

$$A:\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}$$

与

$$B:\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1\\k+1\end{pmatrix}$$

就是这样的向量组，因为它们都是2维向量组，由定理5(2)知其中任意三个向量组都是线性相关的，但若从线性无关部分组所含向量个数来看就不一样了：向量组B中有两个向量的线性无关部分组，如 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，但向量组A中任何两个向量的部分组都是线性相关的，换言之，A组中只有最多含一个向量的线性无关部分组，而B组中却有最多两个

若按向量组与矩阵的对应，将所含最多个向量的线性无关部分组与最高阶非零子式相对应，就可得秩的概念引入向量组

定义5 设有向量组A，如果在A中能选出r个向量（如果A中有r+1个向量的话）都线性相关，那么称向量组 A_0 是向量组A的一个最大线性无关向量组（简称最大无关组），(或称极大线性无关组)，最大无关组所含向量个数r称为向量组A的秩，记作 R_A

只含零向量的向量组没有最大无关组，规定它的秩为0

上述结论的逆命题也是成立的，即能与向量组自身等价的线性无关部分组一定是最大无关组，现把它作为定理3的推论简述如下：

推论（最大无关组的定义） 设向量组 $A_0: a_1, a_2, \cdots, a_r$ 是向量组A的一个部分组，且满足：

(i) 向量组 A_0 线性无关

(ii) 向量组A的任一向量都能由向量组 A_0 线性表示

那么向量组 A_0 便是向量组A的一个最大无关组

e.g. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-2x_4=0\\2x_1+3x_2\qquad-x_4=0\\x_1-x_2-5x_3+7x_4=0\end{cases}$$

的全体解向量为S，求S的秩

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&0&-1\\1&-1&-5&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\0&1&2&-3\\0&-3&-6&9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\0&1&2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-3&4\\0&1&2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=3x_3-4x_4\\x_2=-2x_3+3x_4\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-4\\3\\0\\1\end{pmatrix}$$

FxMarkBrown's Blog