向量组的线性相关性

向量组及其线性组合

- n维向量的引入
- 向量空间：$\mathbb{R}^n=\{x|x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\}$
- 向量组：若干个同维数的列向量（或同维数的行向量）所组成的集合叫做向量组
- 线性组合与线性表示
  - 充要条件
    - 向量b能由向量组A线性表示的充要条件是矩阵$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的秩等于矩阵$B=(a_1,a_2,\cdots,a_m,b)$的秩
    - 向量组B能由向量组A线性表示的充要条件是矩阵$A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$的秩等于矩阵$(A,B)=(a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2,\cdots,b_l)$的秩，即$R(A)=R(A,B)$
  - 向量组等价
    - 若向量组B中的每个向量都能由向量组A线性表示，则称向量组B能由向量组A线性表示，若向量组A，B能相互线性表示则称这两个向量组等价
    - 向量组A,B等价的充要条件是$R(A)=R(B)=R(A,B)$

向量组的线性相关性

- 定义：给定向量组$A:a_1,a_2,\cdots,a_m$，若存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m=0$，则称向量组$A$是线性相关的，否则称它线性无关
- 充要条件：向量组$A:a_1,a_2,\cdots,a_m$线性相关的充要条件是它所构成的矩阵$A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$的秩小于向量的个数m，向量组A线性无关的充要条件是$R(A)=m$
- 一些结论
  - (1) 若向量组A：$a_1,a_2,\cdots,a_m$线性相关，则向量组B：$a_1,a_2,\cdots,a_m,a_{m+1}$也线性相关.反之，若向量组$B$线性无关，则向量组$A$也线性无关
  - (2) m个n维向量组成的向量组，当维数n小于向量个数m时一定线性相关
  - (3) 设向量组A：$a_1,a_2,\cdots,a_m$线性无关，而向量组B：$a_1,a_2,\cdots,a_m,b$线性相关，则向量组b必能由向量组A线性表示，且表示式是唯一的

向量组的秩

- 最大（极大）线性无关组
  - 定义：设有向量组A，如果能在A中能选出r个向量$a_1,a_2,\cdots,a_r$满足
    (1)向量组A_0：$a_1,a_2,\cdots,a_r$线性无关
    (2)向量组A中任意$r+1$个向量（如果A中有$r+1$个向量的话）都线性相关
    则称向量组A_0是向量组A的一个最大线性无关组，其含向量的个数称为向量组A的秩
  - 等价定义：设向量组$A_0:a_1,a_2,\cdots,a_r$是向量组A的一个部分组，且满足
    (1)向量组A_0线性无关
    (2)向量组A的任一向量都能由向量组A_0线性表示
    那么向量组A_0表示向量组A的一个最大无关组
- 矩阵的行向量组秩和列向量组秩：矩阵行秩等于列秩

向量空间

- 定义：设V为n维向量的集合，如果集合V非空，且集合V对于向量的加法及数乘两种运算封闭，那么就称集合V为向量空间
- 齐次线性方程组的解空间：n元齐次线性方程组的解集$S=\{x|Ax=0\}$是一个向量空间，它称为齐次线性方程组的解空间
- 线性生成：一般地，由向量组$a_1,a_2,\cdots,a_m$所生成的向量空间为$span(a_1,a_2,\cdots,a_m)=\{\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_ma_m|\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{R}\}$
- 子空间：设有向量空间V_1及V_2，若$V_1\subseteq V_2$，就称V_1是V_2的子空间
- 基：设V为向量空间，如果r个向量$a_1,a_2,\cdots,a_r\in V$，且满足
  (1)$a_1,a_2,\cdots,a_r$线性无关
  (2)V中任一向量都可由$a_1,a_2,\cdots,a_r$线性表示
  那么向量组$a_1,a_2,\cdots,a_r$称为向量空间V的一个基，r称为向量空间V的维数，记为$\dim V=r$，并称V为r维向量空间
- 坐标：如果在向量空间V中取定一个基$a_1,a_2,\cdots,a_r$，那么V中任一向量x可唯一的表示为
  $x=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_ra_r$
  这个有序数组$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$称为向量$x$为基$a_1,a_2,\cdots,a_r$下的坐标，并记作$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)^T$
- 基变换与坐标变换
  - 在向量空间V中取定两个基$a_1,a_2,\cdots,a_n$与$b_1,b_2,\cdots,b_n$，设$b_i=p_{1i}a_1+p_{2i}a_2+\cdots+p_{ni}a_n(i=1,2,\cdots,n)$，则
    $(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_n)P$
    这里$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$
    此式即为基变换公式，矩阵P称为从基$a_1,a_2,\cdots,a_n$到基$b_1,b_2,\cdots,b_n$的过渡矩阵
  - 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$与$b_1,b_2,\cdots,b_n$是向量空间V的两个基.$\forall\alpha\in V$，设α在基$a_1,a_2,\cdots,a_n$下的坐标为x，在基$b_1,b_2,\cdots,b_n$下的坐标为y
    则$x=Py$
    此式即称为坐标变换公式

线性方程组解的结构

- 齐次线性方程组
  - 齐次线性方程组的基础解系：齐次线性方程组的一个基称为该齐次线性方程组的基础解系
  - 秩-零化度定理：设$m\times n$矩阵A的秩$R(A)=r$，则n元齐次线性方程组$Ax=0$的解空间S的维数$\dim S=n-r$（即该齐次线性方程组的自由未知数个数）
- 非齐次线性方程组
  - 性质
    - (1)设$x=\eta_1$及$x=\eta_2$都是非齐次线性方程组的解，则$x=\eta_1-\eta_2$为对应的齐次线性方程组（导出方程组）的解
    - (2)设$x=\eta$是非齐次线性方程组的一个解，$x=\xi$是非齐次方程组导出方程组的一个解，则$x=\xi+\eta$仍是非齐次线性方程组的解（非齐通解＝齐次通解＋非齐特解）