Labels：—定义文字 —□重要结论 —定义数学语言 —□例题(e.g.)或别称、注解 —符号

第四章 不定积分

第一节 不定积分的概念和性质

一、原函数与不定积分的概念

定义1 如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，即对任意 $x\in I$，都有
$F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$
那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$（或 $f(x)dx$）在区间 I 上的一个原函数

例：1. $(\sin x)'=\cos x$ 故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数
2. $[\ln(x+\sqrt{x^2-1})]'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}})=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $x\in(1,+\infty)$

注意：
1. $[F(x)+C]'$ 也为 $f(x)$，由于 C 是任意常数，这就说明 $f(x)$ 的原函数可以有无数个
2. $f(x)$ 的任意两个原函数间只差一个常数，因此当 C 为任意常数时，表达式 $F(x)+C$ 就可以表示 $f(x)$ 的任意一个原函数

原函数存在定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$，使对任一 $x\in I$ 都有
$F'(x)=f(x)$
简单地说就是：连续函数一定有原函数

定义2 在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$（或 $f(x)dx$）在区间 I 上的不定积分，记作
$\int f(x)dx$
其中记号 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为被积表达式，x 称为积分变量，函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线

不定积分的一些关系
1. 由于 $\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 的原函数
所以 $\frac{d}{dx}[\int f(x)dx]=f(x)$
或 $d[\int f(x)dx]=f(x)\cdot dx$
2. 由于 $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的一个原函数
所以 $\int F'(x)dx=F(x)+C$
或记作 $\int dF(x)=F(x)+C$

由此定义可知，定义1可表述为 $\int f(x)dx=F(x)+C$
例：设曲线过 $(1,2)$，且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍，求此曲线的方程
设曲线为 $y=f(x)$
$\frac{dy}{dx}=2x$
$\therefore f(x)=\int 2xdx=x^2+C$
又曲线过 $(1,2)$
$\therefore C=1$
$\therefore f(x)=x^2+1$

例：推导物理上竖直上抛物体的位移 x 随时间 t 变化的方程（取向上为正方向）
可知 x 是关于 t 的函数，设为 $x=f(t)$
且 $\frac{dx}{dt}=v(t)$，$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=a$，由于 $a=-g$
$\therefore v(t)=-gt+C$ 由 $t=0$ 时 $v(0)=v_0$ 知 C 为初速度，记为 v_0
$\therefore v(t)=v_0-gt$
$\therefore f(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2+C'$ 又由 $t=0$ 时 $f(0)=0$ 得 $C'=0$
$\therefore f(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$

基本积分表：
1. $\int kdx=kx+C$
2. $\int x^\mu dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\ (\mu\neq-1)$
3. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$
4. $\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+C$
5. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$
6. $\int\cos xdx=\sin x+C$
7. $\int\sin xdx=-\cos x+C$
8. $\int\frac{dx}{\cos^2x}=\int\sec^2xdx=\tan x+C$
9. $\int\frac{dx}{\sin^2x}=\int\csc^2xdx=-\cot x+C$
10. $\int\sec x\tan xdx=\sec x+C$
11. $\int\csc x\cot xdx=-\csc x+C$
12. $\int e^xdx=e^x+C$
13. $\int a^xdx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
14. $\int\sinh xdx=\cosh x+C$
15. $\int\cosh xdx=\sinh x+C$
16. $\int\tan xdx=-\ln|\cos x|+C$
17. $\int\cot xdx=\ln|\sin x|+C$
18. $\int\sec xdx=\ln|\sec x+\tan x|+C$
19. $\int\csc xdx=\ln|\csc x-\cot x|+C$
20. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$
21. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|+C$（裂项相消）
22. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
23. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$
24. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|+C$（$a$ 在前后，答案 a 在前后）（a 为正负，答案 a 为正负）

二、不定积分的性质

性质1 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在，则
$\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$（积分加法运算法则）
证：右边求导 $[\int f(x)dx+\int g(x)dx]'=[\int f(x)dx]'+[\int g(x)dx]'=f(x)+g(x)=$ 左边 $(C=0)$

性质2 设函数 $f(x)$ 的原函数存在，k 为非零常数，则
$\int kf(x)dx=k\cdot\int f(x)dx$

第二节 换元积分法

（把复合函数的微分法则，反过来求不定积分）

一、第一类换元法（凑微分法）

设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$，即
$F'(u)=f(u)$，$\int f(u)du=F(u)+C$
若 u 是中间变量，$u=\varphi(x)$，且设 $\varphi(x)$ 可微，那么根据复合函数微分法有
$dF[\varphi(x)]=f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$
从而根据不定积分的定义就得
定理1 设 $f(u)$ 具有原函数，$u=\varphi(x)$ 可导，则有换元公式
$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=[\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}$ ①

① 一般地，对于积分 $\int f(ax+b)dx\ (a\neq0)$，总可以变为
$\int f(ax+b)dx\ (a\neq0)=\int f(ax+b)\cdot\frac{1}{a}(a\cdot dx)$
$=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot d(ax+b)$
$=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$（$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数）
例子：右□
熟练后：$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$
（即求出原函数后乘 x 前系数的倒数）

② 一般地，对于 $\int(\sin x)^{奇次}(\cos x)^{任意次}dx$ / $\int(\sin x)^{任意次}(\cos x)^{奇次}dx$
总可变为：① $\int(\sin x)^{奇次-1(偶次)}(\cos x)^{任意次}(\sin x\cdot dx)$
$=\int(\sin x)^{奇次-1(偶次)}(\cos x)^{任意次}d(-\cos x)$
$=-\int(1-\cos^2x)^{整} \cdot(\cos x)^{任意次}d(\cos x)$
$=-\int($ 去括号乘开后化简对 $\cos x$ 反向求导（积分）$)+C$
例子：右□

③ 一般地，对于 $\int(\sin x)^{偶次}(\cos x)^{偶次}dx$，总要利用三角恒等式
$\sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2}$ / $\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}$（降幂升角公式）
化为 $\int(\frac{1-\cos2x}{2})^{偶/2}\cdot(\frac{1+\cos2x}{2})^{偶/2}\cdot dx$
$=\cdots\cdots$
$=$ 直到把所有 $(\cos\square)^{偶次}$ 用公式降到1次
②把所有 $(\cos\square)^{奇数}$ 提出一个 $(\cos x\cdot dx)$
变为 $(\cos\square)^{偶数}\cdot(\cos x\cdot dx)$
$=$（用公式化为关于与 $\sin\square$ 有关的式子）$\cdot d(\sin x)$
后结合①求积分
例子：右□

④ 一般地，对于 $\int(\tan x)^{任意次}(\sec x)^{偶次}dx$ / $\int(\tan x)^{奇次}(\sec x)^{任意次}dx$
总可：提出一个 $\sec x\cdot\tan x$（或 $\sec^2x$），变为 $\int(\tan x)^{奇次-1}(\sec x)^{任意次-1}(\tan x\cdot\sec x\cdot dx)$
$=\int(\tan x)^{偶次}(\sec x)^{任意次-1}d(\sec x)$
$=\int(\sec^2x-1)^{整}(\sec x)^{任意次}d(\sec x)$
（存在关系：$\sec^2x-\tan^2x=1$）
$=$（去括号乘开后对 $\sec x$ 反向求导（积分））
例子：右□

⑤ 一些利用到三角恒等变换求积分的问题
例子：右□

⑥ 一般地，对于分式类被积函数 $\frac{(关于x的多项式)}{(关于x的多项式)}$
①若分母 x 的最高次幂大于分子 x 的最高次幂：对分子凑微分
②若分母 x 的最高次幂等于分子 x 的最高次幂：分离常数，后凑微分
③若分母 x 的最高次幂小于分子 x 的最高次幂：拆分最高次项，分离常数，凑微分 / 第二类换元法
例子：右□

e.g. 1. 求 $\int2\cos2xdx$
原式 $=\int\cos2x\cdot(2\cdot dx)$
$=\int\cos2x\cdot d(2x)$
$=\sin2x+C$

2. 求 $\int\frac{1}{3+2x}dx$
原式 $=\int\frac{1}{3+2x}\times2\times\frac{1}{2}\times dx$
$=\int\frac{1}{3+2x}\times\frac{1}{2}\times(2\cdot dx)$
$=\int\frac{1}{3+2x}d(2x)\times\frac{1}{2}$
$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{3+2x}d(2x)$（或 $d(2x+3)$）
$=\frac{1}{2}\ln|3+2x|+C$

3. 求 $\int\frac{x^2}{(x+2)^3}dx$
令 $u=x+2$，$x=u-2$
原式 $=\int\frac{(u-2)^2}{u^3}dx$
$=\int\frac{u^2-4u+4}{u^3}dx$
$=\int(u^{-1}-4u^{-2}+4u^{-3})dx$
$=\ln|u|-4\frac{u^{-1}}{-1}+4\frac{u^{-2}}{-2}$
$=\ln|u|+4u^{-1}-2u^{-2}$
$=\ln|x+2|+4(x+2)^{-1}-2(x+2)^{-2}$

4. 求 $\int2xe^{x^2}dx$
原式 $=\int e^{x^2}\cdot(2x\cdot dx)$
$=\int e^{x^2}d(x^2)$
$=e^{x^2}+C$

5. 求 $\int\frac{1}{a^2+x^2}dx\ (a\neq0)$
原式 $=\int\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}dx$
$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}dx$
$=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}\cdot a(\frac{1}{a}dx)\ (=d(\frac{x}{a}))$
$=\frac{1}{a^2}\cdot a\cdot\arctan\frac{x}{a}+C$
$=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

e.g. 求 $\int\tan xdx$
$=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$
$=\int\frac{1}{\cos x}(\sin xdx)$
$=\int\frac{1}{\cos x}d(-\cos x)$
$=-\int\frac{1}{\cos x}d(\cos x)$
$=-\ln|\cos x|+C$
同理 $\int\cot xdx=-\ln|\sin x|+C$

e.g. 求 $\int\sin^2x\cos^4xdx$
$=\int(\frac{1-\cos2x}{2})\cdot(\frac{1+\cos2x}{2})^2dx$
$=\frac{1}{8}\int(1-\cos2x)(1+\cos2x)^2dx$
$=\frac{1}{8}\int(1+\cos2x-\cos^22x-\cos^32x)\cdot dx$
$=\frac{1}{8}\int(\cos2x-\cos^32x)dx+\frac{1}{8}\int(1-\cos^22x)dx$
$=\frac{1}{8}\int(1-\cos^22x)\cdot(\cos2xdx)+\frac{1}{8}\int(1-\frac{1+\cos4x}{2})dx$
$=\frac{1}{8}\int\sin^22x\cdot d(\frac{\sin2x}{2})+\frac{1}{8}\int\frac{1}{2}(1-\cos4x)dx$
$=\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\sin^22xd(\sin2x)+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\int(1-\cos4x)dx$
$=\frac{1}{16}\cdot\frac{\sin^32x}{3}+\frac{1}{16}(x-\sin4x\times\frac{1}{4}$（系数的倒数））$+C$
$=\frac{1}{48}\sin^32x+\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin4x+C$

e.g. 求 $\int\tan^5x\sec^3x\cdot dx$
$=\int\tan^4x\sec^2x\cdot(\sec x\tan x\cdot dx)$
$=\int(\sec^2x-1)^2\cdot\sec^2x\ d(\sec x)$
$=\int(\sec^6x-2\sec^4x+\sec^2x)d(\sec x)$
$=\frac{\sec^7x}{7}-2\frac{\sec^5x}{5}+\frac{\sec^3x}{3}+C$

e.g. 求 $\int\sec^6xdx$
$=\int\sec^4x\cdot(\sec^2xdx)$
$=\int(1+\tan^2x)^2d(\tan x)$
（存在关系 $\sec^2x-\tan^2x=1$）
$=\int(1+2\tan^2x+\tan^4x)d(\tan x)$
$=\tan x+\frac{2\tan^3x}{3}+\frac{\tan^5x}{5}+C$

e.g. 求 $\int\csc xdx$
$=\int\frac{1}{\sin x}dx$
$=\int\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx$
$=\int\frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}(\frac{1}{2}dx)$
$=\int\frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}\cdot d(\frac{x}{2})$
$=\int\frac{1}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}d(\frac{x}{2})$
（$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\Rightarrow\sin\frac{x}{2}=\tan\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$）
$=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}d(\frac{x}{2})$
（$\sec x=\frac{1}{\cos x}$）
$=\int\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}(\sec^2\frac{x}{2}d(\frac{x}{2}))$
$=\int\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}d(\tan\frac{x}{2})$
$=\ln|\tan\frac{x}{2}|+C$
$=\ln|\csc x-\cot x|+C$
（$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\frac{2\times\frac{1-\cos x}{2}}{\sin x}=\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}$（$\cot x-\csc x$）
（$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\Rightarrow\cos\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}$）
同理 $\int\sec xdx=\ln|\sec x+\tan x|+C$

e.g. 求 $\int\cos3x\cos2xdx$
$=\int\frac{\cos x+\cos5x}{2}dx$
（三角函数积化和差公式）
$=\frac{1}{2}\int(\cos x+\cos5x)dx$
$=\frac{1}{2}(\sin x+\frac{1}{5}\sin5x)+C$
$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin5x+C$

三角函数积化和差公式：
$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$
$\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$
$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}$
$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$

二、第二类换元法（代换法：三角代换/根式代换/倒代换）

第一类换元法是将 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ 换为 $\int f(\varphi(x))d(\varphi(x))$，即 $[\int f(u)du]_{u=\varphi(x)}$
第二类换元法是将 $\int f(x)dx$ 换为 $\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$，二者相反
定理2 设 $x=\psi(t)$ 是单调的可导函数，并且 $\psi'(t)\neq0$，又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式
$\int f(x)dx=[\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt]_{t=\psi^{-1}(x)}$（$\psi^{-1}(x)$ 的反函数）

① 三角代换
适用：含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，令 $x=a\sin t$
含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，令 $x=\pm a\sec t$
含有 $\sqrt{x^2+a^2}$，令 $x=a\tan t$
例子：右□
注：含有 $\sqrt{x^2\pm a^2}$ 时，除上面的方法，
含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，令 $x=a\cosh t$（双曲余弦函数）
含有 $\sqrt{x^2+a^2}$，令 $x=a\sinh t$（双曲正弦函数）
（$\cosh^2t-\sinh^2t=1$）

② 倒代换
适用：被积函数为分式形式，且分母有 x
例子：右□

③ 万能代换和见平方
适用：含三角函数的被积函数
如果出现 $\int\frac{\cdots}{\cdots+\square}dx$，若 $\square$ 是正弦/余弦函数，一般采取分子分母同除余弦的方式解决
如果无法解决，还可考虑使用万能代换，将所有三角函数转化为正切函数，使问题简化
①令 $t=\tan\frac{x}{2}$ 　$t=\tan x$
②则有 $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ 　$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ 　$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ 　$dx=\frac{1}{1+t^2}dt$
③将所有的正弦/余弦函数替换为与 t 有关的式子，可使计算简化
例：$\int\frac{1}{2+\cos x}dx$
法1）凑积 $=\int\frac{2-\cos x}{(2+\cos x)(2-\cos x)}dx$（同乘 $2-\cos x$ 凑平方）
$=\int\frac{2-\cos x}{4-\cos^2x}dx$（或者利用倍角公式凑出 $\cos^2\frac{x}{2}$）（$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$）
$=\int\frac{2}{4-\cos^2x}dx$（同除 $\cos x$）$-\int\frac{\cos x}{4-\cos^2x}dx$（凑微分）
$=\int\frac{2\sec^2x}{4\sec^2x-1}dx-\int\frac{1}{4-(1-\sin^2x)}d(\sin x)$
$=\int\frac{2}{4\sec^2x-1}d(\tan x)-\int\frac{1}{3+\sin^2x}d(\sin x)$
$=2\int\frac{1}{4(1+\tan^2x)-1}d(\tan x)-\int\frac{1}{3+\sin^2x}d(\sin x)$
$=2\int\frac{1}{4\tan^2x+3}d(\tan x)-\int\frac{1}{3+\sin^2x}d(\sin x)$
$=\int\frac{1}{(\sqrt3)^2+(2\tan x)^2}d(2\tan x)-\int\frac{1}{(\sqrt3)^2+(\sin x)^2}d(\sin x)$
$=\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{\sin x}{\sqrt3}$

法2）令 $\tan\frac{x}{2}=t$ 则 $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$
$\therefore$ 原式 $=\int\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$
$=2\int\frac{1+t^2}{2(1+t^2)+1-t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt$
$=2\int\frac{1}{3+t^2}dt$
$=2\int\frac{1}{(\sqrt3)^2+t^2}dt$
$=2\cdot\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{t}{\sqrt3}+C$

④ 一些特殊的例子
被积函数分母出现 $1+\sqrt{1-x^2}$，$x+\sqrt{1-x^2}$ / $1+\sqrt{1+x^2}$，$x+\sqrt{1+x^2}$ 时
令 $\sqrt{1-x^2}$ / $\sqrt{1+x^2}$ 为 $\cos t$ / $\tan t$
(1) 对 $1+\sqrt{1-x^2}$，变为 $1+\cos t=2\cos^2\frac{t}{2}$，$\sqrt{1-x^2}=\cos t\Rightarrow x=\sin t\Rightarrow dx=\cos tdt=(2\cos^2\frac{t}{2}-1)dt$
(2) 又对 $x+\sqrt{1-x^2}$，变为 $\sin t+\cos t$，$x=\sin t$，$dx=\cos tdt$
例：$\int\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx$
令 $\sqrt{1-x^2}=\cos t$
$=\int\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$
设 $I_1=\int\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt$，$I_2=\int\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}dt$
利用 $I_1+I_2=\int dt=t+C$ ①
$I_1-I_2=\int\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}dt=\int\frac{1}{\sin t+\cos t}d(\sin t+\cos t)=\ln|\sin t+\cos t|$ ②
由 $\frac{①+②}{2}$ 求得 $\int\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}=\frac{1}{2}(t+\ln|\sin t+\cos t|+C)$

e.g. 求 $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$
设 $x=a\sin t$（$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ 保证单调性）
原式 $=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2t}(a\sin t)'dt$
$=\int a\sqrt{1-\sin^2t}\cdot a\cos t\cdot dt$
$=\int a\cos t\cdot a\cos t\cdot dt$
$=a^2\int\cos^2tdt$
$=a^2\int\frac{1+\cos2t}{2}dt$
$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos2t)dt$
$=\frac{a^2}{2}(t+\frac{\sin2t}{2})+C$
$=\frac{a^2}{2}(t+\frac{2\sin t\cos t}{2})+C$
$=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C$
$x=a\sin t$ 则 $\sin t=\frac{x}{a}$
$\cos t=\sqrt{1-\sin^2t}=\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$
原式 $=\frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a})+C$

求 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$
设 $x=a\tan t$（$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$）
原式 $=\int\frac{1}{\sqrt{a^2\tan^2t+a^2}}(a\tan t)'dt$
$=\int\frac{1}{a\sec t}a\sec^2tdt$
（$\sec^2x-\tan^2x=1$）
$=\int\sec tdt$
$=\ln|\sec t+\tan t|+C$
由 $x=a\tan t\Rightarrow\tan t=\frac{x}{a}$
$\therefore\sec t=\frac{1}{\cos t}=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$
$\therefore$ 原式 $=\ln|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}|+C$（去绝对值）
$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})-\ln a+C$
$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$（常数）
同理 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$

e.g. 求 $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx\ (a\neq0)$
设 $x=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$
$\therefore\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}=\int\frac{\sqrt{a^2-(\frac{1}{t})^2}}{\frac{1}{t^4}}$
$=\int t^4\sqrt{a^2-\frac{1}{t^2}}(-\frac{1}{t^2}dt)$
$=\int\sqrt{a^2t^2-1}\cdot|t|\cdot t^2\cdot\frac{-1}{t^2}dt$
$=-\int\sqrt{a^2t^2-1}\ |t|dt$
当 $x>0$ 时 $t>0$
原式 $=-\int(a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}(tdt)$
$=-\int(a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}d(\frac{t^2}{2})$
$=-\frac{1}{2}\int(a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}d(t^2)$
$=-\frac{1}{2}\frac{(a^2t^2-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\times\frac{1}{a^2}+C$
$=-\frac{(a^2t^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+C$
$=-\frac{(a^2\frac{1}{x^2}-1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+C$
$=-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3a^2}+C$

e.g. ① $\int\frac{x}{x^2+1}dx$
$=\int\frac{1}{x^2+1}(xdx)$
$=\int\frac{1}{x^2+1}d(\frac{x^2}{2})$
$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}d(x^2)$
$=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$
② $\int\frac{x}{x+1}dx$
$=\int\frac{(x+1)-1}{x+1}dx$
$=\int(1+\frac{-1}{x+1})dx$（分离常数）
$=x-\ln|x+1|+C$
③ $\int\frac{x^2}{x+1}dx$
法1）凑 $\int\frac{x(x+1)-(x+1)+1}{x+1}dx$（① x^2+x，多一个 x；② $-x-1$，少个1；③再+1）
$=\int(x-1+\frac{1}{x+1})dx$（分离常数）
$=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C$
法2）令 $x+1=t$ 则 $x^2=(t-1)^2$
原式 $=\int\frac{(t-1)^2}{t}\cdot(t-1)'dt$
$=\int\frac{t^2-2t+1}{t}dt$
$=\int(t-2+\frac{1}{t})dt$
$=\frac{t^2}{2}-2t+\ln|t|+C$
$=\frac{(x+1)^2}{2}-2(x+1)+\ln|x+1|+C$
$=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+\frac{1}{2}+C$
$=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+C$（统称为常数C）

第三节 分部积分法

设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 具有连续导数，则两个函数乘积的导数公式为
$(uv)'=u'v+uv'$
移项得 $uv'=(uv)'-u'v$
两边积分 $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$
为简便起见，写为：
$\int udv=uv-\int vdu$
这称为分部积分公式
如果求 $\int udv$ 困难，可以通过此式转化为求 $\int vdu$

例：求 $\int x\cos xdx$
$=\int x\cdot(\cos xdx)$
令 $u=x$，$dv=\cos xdx$，则 $du=dx$，$v=\int dv=\int\cos xdx=\sin x$
$=x\cdot\sin x-\int\sin xdx$（容易积出）
$=x\cdot\sin x+\cos x+C$
但若令 $u=\cos x$，$dv=xdx$，则 $du=-\sin xdx$，$v=\int dv=\int xdx=\frac{x^2}{2}$
式子即变为 $=\int\cos x\cdot xdx$
$=\cos x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}(-\sin x)dx$
$=\cos x\cdot\frac{x^2}{2}+\int\frac{x^2}{2}\sin xdx$
上式右端积分比原积分更不容易积出
由此可知，如果 u 和 dv 选取不当，就求不出结果
一般选取 u 和 dv 要考虑二点：
(1) v 要容易求得
(2) $\int vdu$ 要比 $\int udv$ 容易积出
① 如果被积函数是幂函数和正(余)弦函数的乘积 / 幂函数和指数函数的乘积，可采用分部积分法，设 u 为幂函数
例子：右□
② 如果被积函数是幂函数和对数函数的乘积 / 幂函数和反三角函数的乘积，可采用分部积分法，设 u 为对数或反三角函数
例子：右□
③ 一些典型的例子
例子：右□
①：分部积分后等式右端出现与左端待求积分相同的式子的，移项÷2
②：换元法与分部积分法综合应用

e.g. 求 $\int xe^xdx$
$=\int xd(e^x)$
$=xe^x-\int e^xdx$
$=xe^x-e^x+C$

e.g. 求 $\int x\cos xdx$
$=\int xd(\sin x)$
$=x\sin x-\int\sin xdx$
$=x\sin x+\cos x+C$

e.g. 求 $\int x^2e^xdx$
$=\int x^2d(e^x)$
分 $=x^2e^x-\int e^xd(x^2)$
$=x^2e^x-2\int e^x\cdot xdx$
分 $=x^2e^x-2\int xd(e^x)$
$=x^2e^x-2(xe^x-\int e^xdx)$
$=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$

e.g. 求 $\int x\ln xdx$
$=\int\ln xd(\frac{x^2}{2})$
$=\ln x\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}d(\ln x)$
$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x^2d(\ln x)$
$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{x}dx$
$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx$
$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$

e.g. 求 $\int\arccos xdx$
$=x\arccos x-\int xd(\arccos x)$
$=x\arccos x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
$=x\arccos x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$
$=x\arccos x-\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{1-x^2}+C$
$=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$

e.g. 求 $\int x\arctan xdx$
$=\frac{1}{2}\int\arctan xd(x^2)$
$=\frac{1}{2}(x^2\arctan x-\int x^2d(\arctan x))$
$=\frac{1}{2}(x^2\arctan x-\int\frac{x^2}{1+x^2}dx)$
凑 $=\frac{1}{2}(x^2\arctan x-\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx)$
$=\frac{1}{2}(x^2\arctan x-\int(1-\frac{1}{1+x^2})dx)$
$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C$
$=\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{1}{2}x+C$

e.g. ① 求 $\int e^x\sin xdx$
$=\int\sin xd(e^x)$
分 $=e^x\sin x-\int e^xd(\sin x)$
$=e^x\sin x-\int e^x\cdot\cos xdx$
$=e^x\sin x-\int\cos xe^xdx$
$=e^x\sin x-\int\cos xd(e^x)$
分 $=e^x\sin x-(e^x\cos x-\int e^xd(\cos x))$
$=e^x(\sin x-\cos x)+\int e^x(-\sin x)\cdot dx$
$=e^x(\sin x-\cos x)-\int e^x\sin xdx$
即 $\int e^x\sin xdx=e^x(\sin x-\cos x)-\int e^x\sin xdx$
$\Rightarrow2\int e^x\sin xdx=e^x(\sin x-\cos x)+C$
$\therefore\int e^x\sin xdx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

② 求 $\int\sec^3xdx$
$=\int\sec xd(\tan x)$
分 $=\sec x\tan x-\int\tan xd(\sec x)$
$=\sec x\tan x-\int\tan^2x\sec xdx$
$=\sec x\tan x-\int(\sec^2x-1)\sec xdx$
$=\sec x\tan x-\int(\sec^3x-\sec x)dx$
$=\sec x\tan x-\int\sec^3xdx+\int\sec xdx$
$=\sec x\tan x-\int\sec^3xdx+\ln|\sec x+\tan x|$
$\Rightarrow2\int\sec^3dx=\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|+C$
$\therefore\int\sec^3dx=\frac{1}{2}(\sec x\tan x+\ln|\sec x+\tan x|+C)$

② 求 $\int e^{\sqrt x}dx$
令 $\sqrt x=t$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$
原式 $=\int e^t2tdt$
$=2\int e^t\cdot tdt$
$=2\int td(e^t)$
$=2(te^t-\int e^tdt)$
$=2(te^t-e^t)+C$
$=2(\sqrt x-1)e^{\sqrt x}+C$

分部积分列表法
类型Ⅰ $\int P_n(x)e^{ax}dx$ 或 $\int P_n(x)\frac{\sin ax}{\cos ax}dx$
e.g. $\int x^2e^xdx$
x^2　$2x$　2　0 —一行求导
e^x　e^x　e^x　e^x —一行积分
$\therefore=x^2e^x-2xe^x+2e^x$
类型Ⅱ $\int e^{ax}\sin bx$ 或 $\int e^{ax}\cos bx$
e.g. $\int e^x\sin xdx$
$\sin x$　$\cos x$　$-\sin x$
e^x　e^x　e^x
$\therefore\int\sin xe^x-\int-\sin xe^x=\sin xe^x-\cos xe^x$
$2\int\sin xe^x=\sin xe^x+\cos xe^x$
$\therefore\int\sin xe^x=\frac{\sin xe^x+\cos xe^x}{2}$

第四节 有理函数的积分

有理函数：两个多项式的商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，又称有理分式，假定分子多项式 $P(x)$ 与分母多项式 $Q(x)$ 间无公因式
当分子多项式 $P(x)$ 的次数小于分母多项式 $Q(x)$，称这有理函数为真分式，否则为假分式

利用多项式的除法，总可以将一个假分式化成一个多项式与一个真分式之和的形式
e.g. $\frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1}=\frac{2x^2(x^2+1)-(x^2+1)+4}{x^2+1}=2x^2-1+\frac{4}{x^2+1}$

对于真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，如果分母可以分解为两个多项式的乘积
$Q(x)=Q_1(x)\cdot Q_2(x)$
且 $Q_1(x)$ 与 $Q_2(x)$ 没有公因式，那么它可以拆成两个真分式之和（裂项）
$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$
若 $Q_1(x)$ 或 $Q_2(x)$ 还能再分解成两个没有公因式的多项式乘积
则最后等号右边一定能拆成 $\frac{P_1(x)}{(x-a)}$、$\frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)}$、多项式三类函数
此类函数的积分易于求得

e.g. 求 $\int\frac{x+1}{x^2-5x+6}dx=\int(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3})dx$
现求出 A，B（极限求系数）
令 $x\to2$ 则右端 $\frac{A}{x-2}\to\infty$ 左端 $\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$ → 3
则 $A=-3$
令 $x\to3$ 则右端 $\frac{B}{x-3}\to\infty$ 左端 $\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$ → 4
则 $B=4$
$\therefore\int\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\int(\frac{-3}{x-2}+\frac{4}{x-3})dx$
$=-3\ln|x-2|+4\ln|x-3|+C$

e.g. 求 $\int\frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)}$
$\frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)}=\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)}$
$=\frac{Ax+B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$
令 $x\to1$，则 $\frac{Ax+B}{(x-1)^2}\to\infty$ 左端 $\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)}$ → −2
$\therefore A+B=-1$
令 $x\to0$，则 $\frac{Ax+B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}\to B+C$ 左端 $\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)}$ → −3
$\therefore B+C=-3$
令 $x\to-1$，则 $\frac{C}{x+1}\to\infty$ 左端 $\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)}$ → −4
$\therefore C=-1$
$\Rightarrow B=-1$ 　$B=-2$ 　$A=1$

FxMarkBrown's Blog