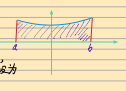
Labels

一定义字 —/□重要结论 —/□定义/导函数 —/□例题(e.g.)或别的、注解 —符号

第六章 定积分的应用

第一节 定积分的元素法

在上一节定积分的定义中，引入了求曲边梯形面积的方法：



(1) 用任意一组分点把区间 $[a,b]$ 分为长度为 $\Delta x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的 n 个小区间，相应地把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形，第 i 个窄曲边梯形的面积设为 ΔA_i，于是有

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i$$

(2) 计算 ΔA_i 的近似值

$$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\quad(x_{i-1}\le\xi_i\le x_i)$$

(3) 求和，得 A 的近似值

$$A\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

(4) 取极限

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx$$

其中最重要的是第三步，实用上，为了简便起见，省略下标 i

$$A=\sum\Delta A$$

取 $[x,x+dx]$ 的左端点 x 为 ξ，认定 x 处的函数值 $f(x)$ 为高；dx 为底的矩形 $f(x)\cdot dx$ 为 ΔA 的近似值，即

$$\Delta A\approx f(x)\cdot dx$$

称为面积元素，记为 dA

于是 $A=\lim\sum f(x)\cdot dx=\int_a^b f(x)\,dx$

一般地，如果某一实际问题中所求量 U 符合下列条件

(1) U 是与一个变量 x 的变化区间 $[a,b]$ 有关的量

(2) U 对于区间 $[a,b]$ 具有可加性，就是说，如果把区间 $[a,b]$ 分成许多部分区间，则 U 相应地分成许多部分量，而 U 等于所有部分量之和

(3) 部分量 ΔU 的近似值可表示为 $f(x_i)\cdot\Delta x_i$

那么，就可考虑用定积分来表达这个量 U，通常写出这个量 U 的积分表达式的步骤是：

1) 根据问题的具体情况，选取一个变量例如 x 为积分变量，并确定它的变化区间 $[a,b]$

2) 设想把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，取其中任一小区间并记作 $[x,x+dx]$，求出相应于这个小区间的部分量 ΔU 的近似值，如果 ΔU 能近似地表示为 $[a,b]$ 上的一个连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 dx 的乘积，就把 $f(x)\cdot dx$ 称为量 U 的元素，且记为 dU，即

$$dU=f(x)\cdot dx$$

3) 以所求量 U 的元素 $f(x)\cdot dx$ 为被积表达式，在区间 $[a,b]$ 上作定积分，得

$$U=\int_a^b f(x)\,dx$$

这就是所求量 U 的积分表达式，这个方法叫做元素法

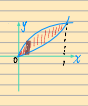
第二节 定积分在几何学上的应用

一、平面图形的面积

1. 直角坐标情形（适用于曲边三角形、梯形等）

e.g. 计算由两条抛物线 $y^2=x$ 与 $y=x^2$ 所围成图形的面积

解：解方程组 $\begin{cases}y^2=x\\y=x^2\end{cases}$ 得到两个解 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 及 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$



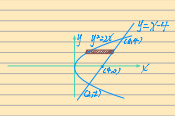
所以两条抛物线的交点为 $(0,0)$ 及 $(1,1)$，从而决定图形是 $x=0$ 与 $x=1$ 之间

取横坐标 x 为积分变量，它的变化区间为 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[x,x+dx]$ 的窄条的面积，以两侧的面积元素

$$dA=(\sqrt{x}-x^2)\,dx$$

以 $(\sqrt{x}-x^2)\,dx$ 为被积表达式，在闭区间 $[0,1]$ 上作定积分，便得所求面积为

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$



e.g. 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成图形的面积

解：解方程组 $\begin{cases}y^2=2x\\y=x-4\end{cases}$ 得交点 $(2,-2)$ 和 $(8,4)$

若取横坐标 x 为积分变量，则需分两部分，因为 $0<x<2$ 时矩形的高为 $2\sqrt{x}$；$2\le x\le 8$ 时矩形的高为 $\sqrt{x}-(x-4)$，矩形的底为 dx

而取纵坐标 y 为积分变量，可以避免分两部分，它的变化区间为 $[-2,4]$，底为 dy，高为 $y+4-\frac{1}{2}y^2$，从而得到面积元素

$$dA=\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy$$

从而得到

$$A=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy=18$$

求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成图形的面积，由此

$$A=4A_1$$

其中 A_1 为椭圆在第一象限部分与两坐标轴所围成

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Longrightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

∴ 椭圆面积可表示为

$$\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$\overset{x=a\cos t}{=}\frac{b}{a}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}a\cos t\cdot a\cos t\,dt$$

$$=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$$

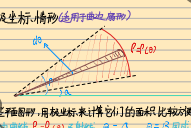
$$\overset{\text{点火}}{=}ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi}{4}ab$$

∴ 椭圆面积为 πab

当 $a=b$，即为圆时，可得圆的面积 πa^2

2. 极坐标情形（适用于曲边扇形）



求连续曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha$、$\theta=\beta$ 围成一图形（简称曲边扇形）的面积

设曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha$、$\theta=\beta$ 围成一图形（简称曲边扇形），现来求其面积

由于当 $\theta\in[\alpha,\beta]$ 上变动时，极径 $\rho=\rho(\theta)$ 也随之变动，因此所求图形的面积不能直接利用扇形面积公式 $A=\frac{1}{2}\theta R^2$ 来计算

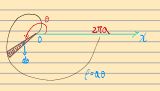
取极角 θ 为积分变量，它的变化区间为 $[\alpha,\beta]$，相应于任一小区间 $[\theta,\theta+d\theta]$ 的窄曲边扇形面积可以用圆心角为 $d\theta$ 的扇形面积来近似代替，从而得到这窄曲边扇形面积的近似值，即曲边扇形的面积元素

$$dA=\frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2\,d\theta$$

则该曲边扇形的面积为

$$A=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2\,d\theta$$

e.g. 计算阿基米德螺线 $\rho=a\theta\ (a>0)$ 上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成图形的面积



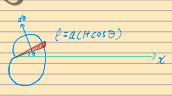
从而曲边扇形的面积应是以于半径为 $a\theta$，中心角为 $d\theta$ 的扇形面积，从而得到面积元素

$$dA=\frac{1}{2}(a\theta)^2\,d\theta$$

于是所求面积为

$$A=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(a\theta)^2\,d\theta=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\theta^3}{3}\Big|_0^{2\pi}=\frac{a^2}{6}(2\pi)^3=\frac{4}{3}\pi^3a^2$$

e.g. 求心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 所围图形的面积



此图形对极轴对称，因此所求图形的面积 A 是极轴以上部分图形面积 A_1 的 2 倍

从圆心角为 θ 的、半径为 $a(1+\cos\theta)$ 的扇形面积近似一窄曲边扇形的面积，从而得到面积元素

$$dA=\frac{1}{2}[a(1+\cos\theta)]^2\,d\theta$$

于是

$$A_1=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[a(1+\cos\theta)]^2\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{3}{4}\pi a^2$$

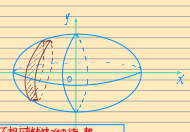
∴ 因而所求面积为 $A=2A_1=\frac{3}{2}\pi a^2$

二、体积

1. 旋转体的体积

旋转体：就是由一个平面图形绕这个平面内的一条直线旋转一周而成的立方体，这直线叫做旋转轴

e.g. 计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体（叫做旋转椭球体）的体积（圆盘法）



取 x 为积分变量，它的变化区间为 $[-a,a]$，旋转椭球体相应于 $[-a,a]$ 上任一小区间 $[x,x+dx]$ 的薄片的体积，近似于底半径为 $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$、高为 dx 的扁圆柱体的体积，即体积元素

$$dV=\frac{b^2\pi}{a^2}(a^2-x^2)\,dx$$

于是所求旋转椭球体的体积为

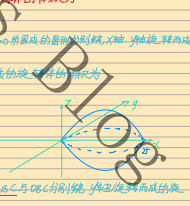
$$V=\int_{-a}^{a}\frac{b^2\pi}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=\frac{b^2\pi}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

当 $a=b$ 时，旋转椭球体就成为半径为 a 的球，它的体积等于 $\frac{4}{3}\pi a^3$

用上面类似的方法可以推出：由曲线 $x=\varphi(y)$、直线 $y=c$、$y=d\ (c<d)$ 与 y 轴所围成的曲边梯形，绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_c^d[\varphi(y)]^2\,dy$$

e.g. 计算曲摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 相应于 $0\le t\le 2\pi$ 的一拱与直线 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转而成的旋转体的体积（体积之差型）



按旋转体的体积公式，所求图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

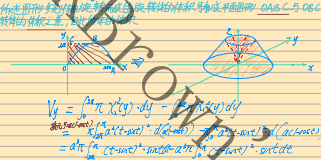
$$V_x=\pi\int_{x=0}^{x=2\pi a}y^2\,dx$$

$$\overset{\text{换元}x=a(t-\sin t)}{=}\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)\,dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt$$

$$=5\pi^2a^3$$

所求图形绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积可看成图形 $OABC$ 与 OBC 分别绕 y 轴旋转而成的两旋转体的体积之差，即所求体积为



$$V_y=\int_{y=0}^{y=2a}\pi x_1^2(y)\,dy-\int_{y=0}^{y=2a}\pi x_2^2(y)\,dy$$

$$\overset{\text{换元}x=a(t-\sin t)}{=}\int_{x=0}^{x=\pi a}\pi a^2(t-\sin t)^2\cdot a(1-\cos t)\,dt-\int_{x=0}^{x=\pi a}\pi a^2(\arccos c)^2\,dx$$

$$=a^3\pi\int_0^{\pi a}(t-\sin t)^2\cdot\sin t\,dt-\pi a^3\int_0^{\pi a}(1-\cos t)^2\cdot\sin t\,dt$$

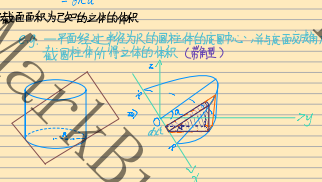
$$=-\pi a^3\int_0^{\pi a}(t-\sin t)^2\,d\cos t+\int_0^{\pi a}(1-\cos t)^2\,d\cos t$$

$$=-\pi a^3\int_0^{\pi a}(t-\sin t)^2\cdot\sin t\,dt$$

$$=\frac{5}{3}\pi^4a^3$$

2. 平行截面面积为已知的立体的体积

一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心，并与底面成角 α，计算这平面截圆柱体所得立体的体积（楔形）



建立如图所示的坐标系，底圆柱、底圆方程为 $x^2+y^2=R^2$

用垂直于 x 轴的平面去截立体，所得的截面是一个直角三角形，由于截面上各点与底面上的距离是变化的，且各点处的截厚度的确定方法也是变化的，因此，就不能用上述方法计算

则截面面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{R^2-x^2}\cdot\tan\alpha=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\cdot\tan\alpha$$

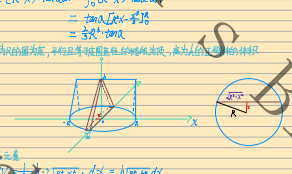
∴ 所求立体的体积为

$$\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\cdot\tan\alpha\,dx=\int_0^R(R^2-x^2)\cdot\tan\alpha\,dx$$

$$=2\tan\alpha\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^R$$

$$=\frac{4}{3}R^3\cdot\tan\alpha$$

e.g. 求以半径为 R 的圆为底，平行且等于底圆直径的正线段为顶，高为 h 的劈形的体积



取图示坐标系，则底圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$

∴ 劈形体的体积元素

$$dV=\frac{1}{2}h\cdot2\sqrt{R^2-x^2}\cdot dx=h\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

∴ 所求立体的体积为

$$V=\int_{-R}^{R}h\sqrt{R^2-x^2}=2h\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

$$\overset{x=R\sin\theta}{=}2R^2h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=2R^2h\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi R^2h}{2}$$

三、平面曲线的弧长

定理：光滑曲线弧是可求长的

① 设曲线弧由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$ 给出，其中 $\varphi(t)$、$\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数，且 $\varphi'(t)$、$\psi'(t)$ 不同时为零，现在来计算这弧段的长度

弧微分表示曲线弧长度，它的定义是：设 A、B 是曲线弧 L 上的两个定点，$M(x,y)$ 是 L 上任一点，$\widehat{AM}$ 表示弧段 AM 的长度，$\widehat{AM}$ 是 x 的单调增加函数，$\widehat{AM}=s(x)$，称 $s(x)$ 为弧微分

弧微分表示曲线弧长度，它的定义是：设 A、B 是曲线弧 L 上的两个定点，$M(x,y)$ 是 L 上任一点，$\widehat{AM}$ 表示弧段 AM 的长度，$\widehat{AM}$ 是 x 的单调增加函数，$\widehat{AM}=s(x)$，称 $s(x)$ 为弧微分

$$\Delta x\approx\Delta t\cdot\varphi'(t)=\varphi'(t)\,dt$$

$$\Delta y\approx\Delta t\cdot\psi'(t)=\psi'(t)\,dt$$

$$dS=\sqrt{[\varphi'(t)\,dt]^2+[\psi'(t)\,dt]^2}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

② 当曲线弧由直角坐标方程 $y=f(x)$ 时，弧微分为

$$dS=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

弧长为

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

③ 当曲线弧由极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)\ (\alpha\le\theta\le\beta)$ 给出，求出直角坐标与极坐标的关系可得

$$\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta\\y=\rho(\theta)\sin\theta\end{cases}\ (\alpha\le\theta\le\beta)$$

所以弧微分为

$$dS=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}\,d\theta=\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}\,d\theta$$

从而所求弧长为

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)}\,d\theta$$

第三节 定积分在物理学的应用

一、变力沿直线所作的功

e.g. 把一个带电量 $+q$ 的点电荷放在 x 轴上坐标原点 O 处，它产生一个电场，这个电场对周围的一个单位正电荷的作用力，大小为 $F=\frac{q}{x^2}$（k 为常数），当这个单位正电荷在电场中从 $x=a$ 处移到 $x=b\ (a<b)$ 处时，计算电场力 F 对它所作的功

在移动过程中，当电荷从 x 移动到 $x+dx$ 时，电场力作的功近似为

$$dW=\frac{kq}{x^2}\cdot dx$$

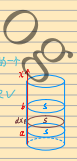
于是所求的功为

$$W=\int_a^b\frac{kq}{x^2}\cdot dx=\left[-\frac{kq}{x}\right]_a^b=\frac{kq}{a}$$

e.g. 在底面积为 S 的圆柱形容器中盛满了一定量的气体，在等温条件下，由实验得知，把容器中的一部分气体（体积为 s）从压力为 p 的状态压缩到整个容器时，计算在这个过程中，气体压力所做的功。

取坐标系如图所示，活塞位置可用坐标 x 来表示，由物理学知道，等温条件下，压强 p 与体积 V 的乘积是常数 k（玻意耳定律），即

$$pV=k\quad\text{或}\quad p=\frac{k}{V}$$



因为 $V=x\cdot S$，所以

$$p=\frac{k}{xS}$$

又因为 $F=pS=\frac{k}{x}$，所以压缩过程中所做功的微元为

$$dW=\frac{k}{x}\,dx$$

于是所做功为

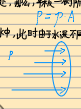
$$W=\int_{s_0}^{s_1}\frac{k}{x}\,dx=k\ln\frac{s_1}{s_0}=k\ln\frac{s_1}{s}$$

二、水压力

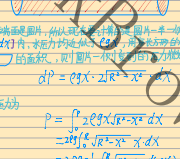
从物理学知道，在水深为 h 处的压强为 $p=\rho gh$，这里的 ρ 是水的密度，g 是重力加速度，如果有一面积为 A 的薄板水平地放置在水深为 h 处，那么，薄板一侧所受的水压力为

$$P=p\cdot A$$

如果薄板如图放置在水中，此时由于水深不同的点处压强不相等，薄板一侧所受的水压力就不能用上述方法计算



e.g. 一个横放着的半径为 R 的圆柱桶，桶内盛有半桶水，设桶的底半径为 R，水的密度为 ρ，计算桶的一个端面上所受的压力



桶的一个端面是圆片，现以端面圆心为原点，竖直向下为 x 轴，在端面圆片上取一小长条，它的位置由 x 决定，在区间 $[x,x+dx]$ 内，长条所受的压力近似等于水深为 x 处的压强与长条面积的乘积，长条面积等于 $2\sqrt{R^2-x^2}\,dx$，因此，圆片一侧所受的压力微元为

$$dP=\rho gx\cdot2\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

于是所求压力为

$$P=\int_0^R2\rho gx\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

$$=2\rho g\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,x\,dx$$

$$=2\rho g\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,d(-x^2)$$

$$=\rho g\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,d(R^2-x^2)$$

$$=-\rho g\left[\frac{2}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R$$

$$=-\frac{2}{3}\rho g(0-R^3)$$

$$=\frac{2}{3}\rho gR^3$$

三、引力

从物理学知道，质量分别为 m_1、m_2，相距为 r 的两质点间的引力的大小为

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

其中 G 为引力常数，引力的方向沿着两质点的连线方向

如果计算一根细棒对一个质点的引力，那么，由于细棒上各点与该质点的距离是变化的，且各点对该质点的引力方向也是变化的，因此，就不能用上述公式计算

e.g. 设有一长度为 l、线密度为 μ 的均匀细直棒，在其中垂线上距棒 a 单位处有一质量为 m 的质点 M，试计算该棒对质点 M 的引力

取坐标系如图，在棒上取小段，设其坐标为 x，则这一小段对质点 M 的引力微元为

$$dF=G\frac{m\mu\,dx}{a^2+x^2}$$

则该力在水平方向的分力为

$$dF_x=dF\cdot\cos\theta=G\frac{m\mu\,dx}{a^2+x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}=-G\frac{am\mu}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\quad(\text{取 }x\text{ 轴正方为正方向})$$

则引力在水平方向的分力为

$$F_x=-\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}G\frac{am\mu}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx=-\frac{2Gm\mu}{a}\cdot\frac{l^2}{\sqrt{4a^2+l^2}}$$

设力在竖直方向的分量为 Q

∴ 当细棒长度 l 很大时，$\frac{l^2}{\sqrt{4a^2+l^2}}\longrightarrow l$，此时引力大小为 $\frac{2Gm\mu}{a}$，方向水平向左

FxMarkBrown's Blog