

微分方程的常见种类及解法

微分方程组

简单形式：第一个式子两边求导后代入第二个式子，消去第二个式子中的一个未知函数的导数

复杂形式：使用微分算子D获得关于D的线性方程组，克拉默法则求出一个未知函数后，将方程组进行线性运算消去其余未知函数的导数，代入此前求出的未知函数求出另外的未知函数

一阶微分方程

- 可分离变量的
 - 分离后积分求解
- 特殊：齐次方程
 - 性质：代入恒为零即为解，加C为通解
 - 化为分式，齐次化后换元
 - $u = \frac{y}{x}$
- 特殊：齐次线性方程
 - 常数变易法
 - $y = e^{\int P(x)dx} (\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C)$
- 特殊：伯努利方程
 - 同除 y^n 后凑为 y^{n-1} 的一阶非齐次线性方程，常数变易法公式求解

高阶微分方程

- 可降价的高阶微分方程
 - $y^{(n)} = f(x)$ 型 → 累次积分求解
 - $y^{(n+1)} = f(x, y^{(n)})$ 型 → 令 $u = y^{(n)}, y^{(n+1)} = u'$
 - $y^{(n+1)} = f(y^{(n-1)}, y^{(n)})$ 型 → 令 $u = y^{(n)}, y^{(n+1)} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy^{(n-1)}} \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = u \frac{du}{dy^{(n-1)}}$
- 特殊：齐次方程
 - 性质：代入恒为零为解，如果已知和阶数数量相同的解，且这几项线性无关，每项加C即为通解
 - 尝试齐次化后换元，有时还可以凑微分(e.g. 同乘 $2y$ 凑出 $(y^2)'$)
 - 特殊：齐次线性方程
 - 推广的常数变易法
 - $y = C_1y_1 + C_2y_2 - y_1 \int \frac{y_2f}{W} + y_2 \int \frac{y_1f}{W}, W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$
 - 特殊：欧拉方程 → 令 $x = e^t, t = \ln x$ 后使用微分算子D变为关于y各阶导数的非齐次线性方程，特征方程 + 待定系数法获得通解
 - 特殊：常系数齐次线性微分方程 → 特征方程求解
 - 特殊：非齐次线性方程
 - 对应齐次方程特征方程求得齐次方程的通解+推广的常数变易法求非齐次线性方程的通解
 - 性质：通解=对应齐次方程通解+方程本身的一个特解
 - 待定系数法
 - $f(x)$ 为 $e^{\lambda x} P_m(x)$ 型
 - $f(x)$ 为 $e^{\lambda x} [P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x]$ 型