FxMarkBrown's Blog

第八章 向量与解析几何

第一节 向量及其线性运算

一、向量的概念

向量：既有大小，又有方向的量，记作 $\vec{a}$ 或 $\boldsymbol{a}$。

向量的模：向量的大小，记作 $|\vec{a}|$。

单位向量：模为 1 的向量。

零向量：模为 0 的向量，记作 $\vec{0}$，方向任意。

负向量：与 $\vec{a}$ 模相等、方向相反的向量，记作 $-\vec{a}$。

向量的平行：两个非零向量方向相同或相反，称为平行，记作 $\vec{a} \parallel \vec{b}$。

向量的相等：两个向量模相等且方向相同，称为相等，记作 $\vec{a} = \vec{b}$。

二、向量的线性运算

向量的加法（三角形法则与平行四边形法则）

设 $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$，$\vec{b} = \overrightarrow{BC}$，则 $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$。

运算律：

- 交换律：$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- 结合律：$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

向量的减法

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

数乘向量：实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 仍是向量，满足：

- $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$
- $\lambda > 0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向；$\lambda < 0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向；$\lambda = 0$ 时，$\lambda\vec{a} = \vec{0}$。

运算律：

- 结合律：$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
- 分配律：$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$，$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

定理：设 $\vec{a} \neq \vec{0}$，则向量 $\vec{b}$ 平行于 $\vec{a}$ 的充要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$。

三、空间直角坐标系

空间直角坐标系：过空间一定点 O，作三条两两垂直的数轴，依次记为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为坐标轴。点 O 称为**坐标原点**。

通常三个轴的正向符合**右手系**：右手握住 z 轴，当右手四指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指指向 z 轴正向。

坐标面：xOy 面、yOz 面、zOx 面，三个坐标面把空间分成八个**卦限**。

向量的坐标：

设 $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$，$M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

两点间距离公式：

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

特别地，点 $M(x, y, z)$ 到原点 O 的距离为 $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$。

定比分点公式：设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，点 M 在 M_1M_2 上且 $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$（$\lambda \neq -1$），则

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

特别地，当 $\lambda = 1$ 时，M 为 M_1M_2 的**中点**，坐标为 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$。

四、向量的模、方向角与投影

向量的方向角：非零向量 $\vec{a}$ 与三个坐标轴正向的夹角 α, β, γ（$0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$）称为 $\vec{a}$ 的**方向角**。

方向余弦：$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为 $\vec{a}$ 的**方向余弦**。

设 $\vec{a} = (x, y, z)$，则

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}$$

且 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$。

向量在轴上的投影：

设向量 $\vec{a}$ 与轴 u 的夹角为 φ，则 $\vec{a}$ 在轴 u 上的投影为 $\mathrm{Prj}_u\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$。

投影的性质：

- $\mathrm{Prj}_u(\vec{a} + \vec{b}) = \mathrm{Prj}_u\vec{a} + \mathrm{Prj}_u\vec{b}$
- $\mathrm{Prj}_u(\lambda\vec{a}) = \lambda\,\mathrm{Prj}_u\vec{a}$

第二节 数量积、向量积、*混合积

一、两向量的数量积（点积，内积）

数量积的概念：设两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ（$0 \leq \theta \leq \pi$），则称 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**数量积**，记作 $\vec{a} \cdot \vec{b}$，即

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

数量积的坐标表达式：设 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$，$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$，则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

两向量夹角的余弦公式：

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

两向量垂直的充要条件：$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$。

数量积的性质：

- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$（交换律）
- $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$（分配律）

二、两向量的向量积（叉积，外积）

向量积的概念：设向量 $\vec{c}$ 由两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 按下列方式确定：

- $\vec{c}$ 的模 $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，其中 θ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角；
- $\vec{c}$ 的方向既垂直于 $\vec{a}$，又垂直于 $\vec{b}$，且 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手系。

则称 $\vec{c}$ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**向量积**，记作 $\vec{a} \times \vec{b}$。

向量积的坐标表达式：设 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$，$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$，则

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - y_2z_1)\boldsymbol{i} + (z_1x_2 - z_2x_1)\boldsymbol{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\boldsymbol{k}$$

两向量平行的充要条件：$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$。

向量积的性质：

- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$（反交换律）
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$（分配律）

向量积的几何意义：$|\vec{a} \times \vec{b}|$ 表示以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积。

三、*混合积

混合积的概念：设三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$，则 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ 称为 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 的**混合积**，记作 $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$。

混合积的坐标表达式：设 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$，$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$，$\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$，则

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

三向量共面的充要条件：$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = 0$。

混合积的几何意义：$|[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]|$ 表示以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积。

第三节 平面及其方程

一、曲面及其方程

曲面方程的概念：在空间直角坐标系中，如果曲面 S 与三元方程 $F(x, y, z) = 0$ 满足：

- 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 $F(x, y, z) = 0$；
- 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 $F(x, y, z) = 0$。

则称方程 $F(x, y, z) = 0$ 为曲面 S 的**方程**，曲面 S 称为方程 $F(x, y, z) = 0$ 的**图形**。

旋转曲面：一条平面曲线 C 绕同一平面内一条定直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**，这条定直线称为旋转曲面的**轴**，曲线 C 称为旋转曲面的**母线**。

设 C 为 yOz 面上的曲线 $f(y, z) = 0$，则 C 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$；$C$ 绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面方程为 $f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$。

柱面：平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线所形成的曲面称为**柱面**，定曲线 C 称为柱面的**准线**，动直线称为柱面的**母线**。

只含 x, y 而缺 z 的方程 $F(x, y) = 0$ 在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线可取为 xOy 面上的曲线 $F(x, y) = 0$。

二、平面的点法式方程

平面的法向量：若非零向量 $\vec{n}$ 垂直于平面 π，则称 $\vec{n}$ 为平面 π 的**法向量**。

平面的点法式方程：设平面 π 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$，则平面 π 的方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

三、平面的一般式方程

平面的一般式方程：

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

其中 A, B, C 不全为零，$\vec{n} = (A, B, C)$ 为平面的一个法向量。

特殊位置的平面：

- $D = 0$：平面过原点；
- $A = 0$：平面平行于 x 轴；$B = 0$：平面平行于 y 轴；$C = 0$：平面平行于 z 轴；
- $A = B = 0$：平面平行于 xOy 面；$A = C = 0$：平面平行于 zOx 面；$B = C = 0$：平面平行于 yOz 面。

四、两平面的夹角

两平面的夹角：两平面法向量的夹角（通常取锐角）称为两平面的**夹角**。

设平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$，$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$，则 π_1 与 π_2 的夹角 θ 满足

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

两平面的位置关系：

- $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
- $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$（$A_2, B_2, C_2$ 均不为零）

五、点到平面的距离

点到平面的距离：设点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$，则 P_0 到 π 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

第四节 空间直线及其方程

一、空间直线的方程

空间直线的一般式方程：空间直线 L 可以看作两个不平行平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 与 $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 的交线，则

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

称为直线 L 的**一般式方程**。

直线的点向式方程：设直线 L 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，方向向量为 $\vec{s} = (m, n, p)$，则直线 L 的方程为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

称为直线 L 的**点向式方程**（或**对称式方程**）。

直线的参数式方程：由点向式方程，令 $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$，则直线 L 的**参数式方程**为

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

两直线的夹角：两直线方向向量的夹角（通常取锐角）称为两直线的**夹角**。

设直线 $L_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$，$L_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$，则 L_1 与 L_2 的夹角 φ 满足

$$\cos\varphi = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

两直线的位置关系：

- $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$
- $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$

二、直线与平面的位置关系

直线与平面的夹角：直线与其在平面上的投影直线的夹角称为直线与平面的**夹角**。

设直线 $L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$，平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$，则 L 与 π 的夹角 φ 满足

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

直线与平面的位置关系：

- $L \perp \pi \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$
- $L \parallel \pi \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$

三、*杂例

例 1 求过点 $(1, 2, 3)$ 且垂直于平面 $x + 2y - z = 0$ 的直线方程。

例 2 求过点 $(0, 1, 2)$ 且平行于直线 $\frac{x}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 1}{3}$ 的直线方程。

例 3 求过点 $(1, 0, 1)$ 且与两平面 $x + y = 0$ 和 $y + z = 0$ 都平行的直线方程。

例 4 求过点 $(2, 1, 3)$ 且与直线 $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ 垂直的平面方程。

例 5 求点 $(1, 2, 1)$ 到平面 $x + 2y + 2z - 10 = 0$ 的距离。

例 6 求点 $(1, 2, 1)$ 到直线 $\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z}{2}$ 的距离。

例 7 求过点 $(1, 1, 1)$ 且与两直线 $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ 和 $\frac{x - 1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z - 1}{4}$ 都相交的直线方程。

例 8 求过点 $(1, 0, 0)$ 且与直线 $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$ 垂直相交的直线方程。

例 9 求直线 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ 在平面 $x + y + z = 0$ 上的投影直线方程。

例 10 求直线 $\frac{x - 1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z + 1}{3}$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的夹角。

第五节 曲面及其方程

一、旋转曲面及其方程

旋转曲面的概念：一条平面曲线 C 绕同一平面内一条定直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**，这条定直线称为旋转曲面的**轴**，曲线 C 称为旋转曲面的**母线**。

设 C 为 yOz 面上的曲线 $f(y, z) = 0$，则 C 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$；$C$ 绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面方程为 $f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$。

二、柱面

柱面的概念：平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线所形成的曲面称为**柱面**，定曲线 C 称为柱面的**准线**，动直线称为柱面的**母线**。

只含 x, y 而缺 z 的方程 $F(x, y) = 0$ 在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线可取为 xOy 面上的曲线 $F(x, y) = 0$。

三、*二次曲面

二次曲面的概念：三元二次方程 $F(x, y, z) = 0$ 所表示的曲面称为**二次曲面**。

椭球面：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$（$a, b, c > 0$）

椭圆抛物面：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$（$a, b > 0$）

双曲抛物面（马鞍面）：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$（$a, b > 0$）

单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$（$a, b, c > 0$）

双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$（$a, b, c > 0$）

椭圆锥面：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$（$a, b, c > 0$）

第六节 空间曲线及其方程

一、空间曲线的一般式方程

空间曲线的一般式方程：空间曲线 C 可以看作两个曲面 $F(x, y, z) = 0$ 与 $G(x, y, z) = 0$ 的交线，则

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

称为曲线 C 的**一般式方程**。

二、空间曲线的参数式方程

空间曲线的参数式方程：将曲线 C 上动点的坐标 x, y, z 表示为参数 t 的函数

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

称为曲线 C 的**参数式方程**。

例 1 螺旋线 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$（$a > 0$，$b \neq 0$）

三、空间曲线在坐标面上的投影

投影柱面：以空间曲线 C 为准线，母线平行于 z 轴的柱面称为曲线 C 关于 xOy 面的**投影柱面**。

投影曲线：投影柱面与 xOy 面的交线称为曲线 C 在 xOy 面上的**投影曲线**，简称**投影**。

设曲线 C 的一般式方程为 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$，则从方程组中消去 z 得 $H(x, y) = 0$，即为曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面方程，曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$。

例 2 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线方程。

例 3 求曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 1 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线方程。

例 4 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = x + 1 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线方程。

例 5 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线方程。

例 6 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在 yOz 面上的投影曲线方程。

例 7 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 在 zOx 面上的投影曲线方程。

例 8 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = x + 1 \end{cases}$ 在 yOz 面上的投影曲线方程。

例 9 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$ 在 yOz 面上的投影曲线方程。

例 10 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$ 在 zOx 面上的投影曲线方程。

第七节 *柱面坐标系与球面坐标系

一、柱面坐标系

柱面坐标系的概念：设 $M(x, y, z)$ 为空间一点，M 在 xOy 面上的投影为 P，P 在 x 轴上的投影为 Q，则 M 的柱面坐标为 (r, θ, z)，其中 $r = |OP|$，θ 为 x 轴正向到 OP 的角，$z = |QM|$。

柱面坐标与直角坐标的关系：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

例 1 将柱面坐标 $(2, \frac{\pi}{3}, 1)$ 化为直角坐标。

例 2 将直角坐标 $(1, 1, 1)$ 化为柱面坐标。

例 3 将柱面坐标方程 $r = 2\cos\theta$ 化为直角坐标方程。

例 4 将直角坐标方程 $x^2 + y^2 = 2x$ 化为柱面坐标方程。

例 5 将柱面坐标方程 $z = r^2$ 化为直角坐标方程。

例 6 将直角坐标方程 $z = x^2 + y^2$ 化为柱面坐标方程。

例 7 将柱面坐标方程 $r = 1$ 化为直角坐标方程。

例 8 将直角坐标方程 $x^2 + y^2 = 1$ 化为柱面坐标方程。

例 9 将柱面坐标方程 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 化为直角坐标方程。

例 10 将直角坐标方程 $y = x$ 化为柱面坐标方程。

二、球面坐标系

球面坐标系的概念：设 $M(x, y, z)$ 为空间一点，M 在 xOy 面上的投影为 P，P 在 x 轴上的投影为 Q，则 M 的球面坐标为 (r, φ, θ)，其中 $r = |OM|$，φ 为 z 轴正向到 OM 的角，θ 为 x 轴正向到 OP 的角。

球面坐标与直角坐标的关系：

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

例 1 将球面坐标 $(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ 化为直角坐标。

例 2 将直角坐标 $(1, 1, \sqrt{2})$ 化为球面坐标。

例 3 将球面坐标方程 $r = 2$ 化为直角坐标方程。

例 4 将直角坐标方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 化为球面坐标方程。

例 5 将球面坐标方程 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 化为直角坐标方程。

例 6 将直角坐标方程 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 化为球面坐标方程。

例 7 将球面坐标方程 $r = 1$ 化为直角坐标方程。

例 8 将直角坐标方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 化为球面坐标方程。

例 9 将球面坐标方程 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 化为直角坐标方程。

例 10 将直角坐标方程 $y = x$ 化为球面坐标方程。